

Ασκήσεις στην Ισότητα Τριγώνων

4ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Συνέπειες των κριτηρίων ισότητας τριγώνων

- **Στο ισοσκελές τρίγωνο:**

Πόρισμα I, σελίδα 42

Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες.

Πόρισμα I, σελίδα 42

Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

Πόρισμα I, σελίδα 45

Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι ύψος και διχοτόμος.

Πόρισμα I, σελίδα 50

Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι διάμεσος και διχοτόμος.

- **Στον κύκλο:**

Πόρισμα IV, σελίδα 42, Πορίσματα III, IV, σελίδα 46

Αν δύο τόξα είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες και αντίστροφα.

Θεώρημα III, σελίδα 51

Δύο χορδές είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματα τους είναι ίσα.

Πόρισμα II, σελίδα 50

Ο φορέας του αποστήματος μιας χορδής:

- είναι μεσοκάθετος της χορδής,
- διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο της χορδής.

• Ιδιότητα διχοτόμου γωνίας:

Θεώρημα IV, σελίδα 51

- Κάθε σημείο της διχοτόμου μια γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.
- Κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της ανήκει στη διχοτόμο της.

• Ιδιότητα μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος:

Πόρισμα III, σελίδα 42, Πόρισμα II, σελίδα 45

- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).
 - (α) Το οξυγώνιο τρίγωνο έχει μόνο μια οξεία γωνία.
 - (β) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι παραπληρωματικές.
 - (γ) Ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο δεν μπορεί να είναι ισοσκελές.
 - (δ) Οποιαδήποτε δύο τρίγωνα, που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.
 - (ε) Οποιαδήποτε δύο τρίγωνα, που έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.
 - (ς) Οποιαδήποτε δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.
 - (ζ) Δύο ίσα τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους.
 - (η) Σε δύο οποιαδήποτε τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
 - (θ) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που άγεται από οποιαδήποτε κορυφή είναι διχοτόμος της αντίστοιχης γωνίας και διάμεσος της απέναντι πλευράς.
 - (ι) Αν Μ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε $MA = MB$.
 - (ια) Αν δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, τότε και τα αποστήματα τους είναι ίσα.
 - (ιβ) Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που ισαπέχουν από τα άκρα του.
 - (ιγ) Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

Ασκήσεις

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα σημεία Δ , E των πλευρών AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

Αν το σημείο M είναι το μέσο του ΔE , να αποδείξετε ότι:

- (α) το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές,
 (β) τα τρίγωνα $AM\Delta$ και AME είναι ίσα.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), $A\Delta$ το ύψος του και O τυχαίο σημείο του $A\Delta$.

- (α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $BO\Gamma$ είναι ισοσκελές.
 (β) Αν E , Z είναι τα μέσα των OB και OG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AE = AZ$.

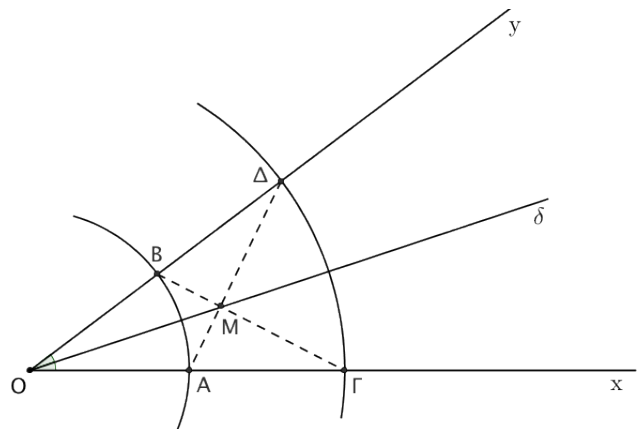
3. Θεωρούμε γωνία $\widehat{xOy}$ και δύο κύκλους (O, ρ) , (O, R) , με $\rho < R$. Αν ο πρώτος κύκλος τέμνει τις πλευρές Ox , Oy στα σημεία A , B , ο δεύτερος στα Γ , Δ και M είναι το σημείο τομής των $A\Delta$ και $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- (α) τα τρίγωνα $O\Delta A$ και $O\Gamma B$ είναι ίσα,

- (β) τα τρίγωνα $MA\Gamma$ και $MB\Delta$ είναι ίσα,

- (γ) τα τρίγωνα OAM και OBM είναι ίσα,

- (δ) η OM είναι η διχοτόμος της $\widehat{xOy}$.



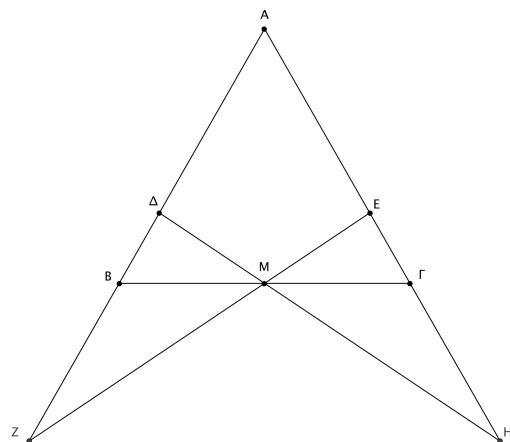
4. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$. Επίσης, $A\Delta = AE$ και M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

Αν η προέκταση του ΔM τέμνει την προέκταση της πλευράς $A\Gamma$ στο σημείο H και η προέκταση του EM τέμνει την προέκταση της πλευράς AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι:

- (α) τα τρίγωνα ΔMB και $EM\Gamma$ είναι ίσα,

- (β) τα τρίγωνα ZBM και $H\Gamma M$ είναι ίσα,

- (γ) το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.

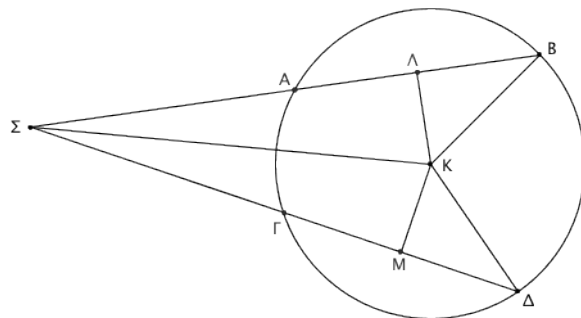
**Σημείωση**

Η άσκηση 3 δίνει έναν τρόπο κατασκευής της διχοτόμου μιας γωνίας.

5. Από εξωτερικό σημείο Σ του κύκλου (K, ρ) θεωρούμε τις τέμνουσες ΣAB και $\Sigma \Gamma \Delta$ του κύκλου για τις οποίες ισχύει $\Sigma B = \Sigma \Delta$. Τα $K\Lambda$ και KM είναι τα αποστήματα των χορδών AB και $\Gamma \Delta$ του κύκλου αντίστοιχα.

(α) Να αποδείξετε ότι:

- i. τα τρίγωνα $KB\Sigma$ και $K\Delta\Sigma$ είναι ίσα,
- ii. $K\Lambda = KM$.



(β) Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές AB και $\Gamma \Delta$ είναι ίσες.

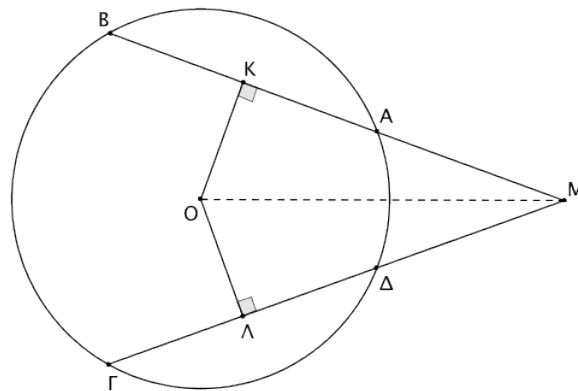
6. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και δύο ίσες χορδές του AB και $\Gamma \Delta$. Αν οι προεκτάσεις των ίσων χορδών τέμνονται στο σημείο M και $OK \perp AB$, $OL \perp \Gamma \Delta$, να αποδείξετε ότι:

(α) $OK = OL$ και $KA = LD$,

(β) τα ορθογώνια τρίγωνα MOK και $MO\Lambda$ είναι ίσα,

(γ) $MA = M\Delta$ και $MB = M\Gamma$,

(δ) η ευθεία που διέρχεται από τα M και O είναι κάθετη στη χορδή $B\Gamma$.



7. Σε οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB < A\Gamma$, φέρουμε το ύψος $A\Delta$ και τη διάμεσο AM . Προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ κατά $\Delta E = A\Delta$ και τη διάμεσο AM κατά $MZ = AM$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές,
- (β) τα τρίγωνα ABM και $MZ\Gamma$ είναι ίσα,
- (γ) $BE = \Gamma Z$,
- (δ) τα σημεία E και Z ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.

“Ο Αρχιμήδης θα μνημονεύεται, όταν ο Αισχύλος θα έχει ξεχαστεί, γιατί, ενώ οι γλώσσες πεθαίνουν, οι μαθηματικές ιδέες είναι διαχρονικές.”
Godfrey Harold Hardy, 1877-1947, Άγγλος μαθηματικός.