

Το Θέμα της Εβδομάδας

Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Θέμα 6ο. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - x + 1$ και η συνάρτηση $g : \left[\frac{3}{4}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{4x - 3}$.

(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq \frac{3}{4}$.

(β) Να βρείτε την συνάρτηση $h = \text{gof}$.

(γ) Αν $h(x) = |2x - 1|$, να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x+1} - 1} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(x)}{f(x) + 1} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(h(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{h(x)}\right) \right)$$

Λύση.

(α) Έχουμε

$$f(x) \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(x^2 - x + 1) \geq 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 \geq 0,$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Οι συναρτήσεις f και g , έχουν πεδία ορισμού:

$$D_f = \mathbb{R} \quad \text{και} \quad D_g = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right).$$

Για το πεδίο ορισμού της $h = \text{gof}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} D_h &= D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq \frac{3}{4}\} \\ &= \mathbb{R}, \quad \text{αφού από το ερώτημα (α) ισχύει } f(x) \geq \frac{3}{4}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Για τον τύπο της συνάρτησης $h = \text{gof}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} h(x) &= (\text{gof})(x) = g(f(x)) = \sqrt{4(x^2 - x + 1) - 3} \\ &= \sqrt{4x^2 - 4x + 1} \\ &= \sqrt{(2x - 1)^2} \\ &= |2x - 1|. \end{aligned}$$

- (γ) i. Αφού $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1) = -1 < 0$, τότε $2x - 1 < 0$ κοντά στο 0, άρα
 $|2x - 1| = -2x + 1$, κοντά στο 0.
 Οπότε,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x+1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 1 - 1}{\sqrt{x+1} - 1} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1} + 1)}{x + 1 - 1} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1} + 1) \\ &= -4. \end{aligned}$$

ii.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(x)}{f(x) + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(x)}{x^2 - x + 2} = \frac{0}{2} = 0.$$

- iii. Έστω $h(x) = u$, κοντά στο $\frac{1}{2}$.
 Οπότε, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} u = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} h(x) = 0$.

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(h(x) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{h(x)} \right) \right) = \lim_{u \rightarrow 0} u \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{u} \right) = 0.$$