Μαθηματικά Προσανατολισμού Β΄ Λυκείου
Κεφάλαιο 1ο: Διανύσματα
Βασικό Τυπολόγιο

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Συντεταγμένες Διανύσματος

Αν δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$, τότε

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1, \mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1).$$

Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων

$\overrightarrow{u} = \kappa\overrightarrow{\alpha} + \lambda\overrightarrow{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
Αν $\overrightarrow{\alpha} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ τότε $\overrightarrow{u} = (\kappa\mathrm{x}_1 + \lambda\mathrm{x}_2, \kappa\mathrm{y}_1 + \lambda\mathrm{y}_2)$.

Μέσο Ευθύγραμμου Τμήματος

Έστω Μ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Τότε:

- αν Ο σημείο αναφοράς,
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$
- αν $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$,
$$\mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2}{2}, \frac{\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2}{2}\right).$$

Μέτρο Διανύσματος

Αν $\overrightarrow{\alpha} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ τότε $|\overrightarrow{\alpha}| = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}$.

Απόσταση Δύο Σημείων

Αν $\mathrm{A}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ και $\mathrm{B}(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$, τότε $(\mathrm{AB}) = \sqrt{(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2 + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1)^2}$.

Τριγωνική Ανισότητα

$$\left||\overrightarrow{\alpha}| - |\overrightarrow{\beta}|\right| \leq |\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}| \leq |\overrightarrow{\alpha}| + |\overrightarrow{\beta}|.$$

Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος

Αν $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ και θ η γωνία που διαγράφει ο άξονας $\mathrm{x}'\mathrm{x}$ όταν στραφεί κατά τη θετική φορά γύρω από το σημείο Ο μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία ΟΑ, τότε

$$\lambda_{\overrightarrow{\alpha}} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \text{εφ}\theta,\ \mathrm{x} \neq 0.$$

Εσωτερικό Γινόμενο

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \left|\vec{\beta}\right|$ συν $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$
- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$
  $\left(\text{αν } \vec{\alpha} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2)\right)$
- $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$
- $\vec{\alpha} \cdot \left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$
- $\left|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right| \leq |\vec{\alpha}| \left|\vec{\beta}\right|$
- $\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right)^2 \leq \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$
- $\vec{\alpha} \cdot \left(\lambda\vec{\beta}\right) = (\lambda\vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \lambda\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right)$

Ίσα Διανύσματα

Για μη μηδενικά διανύσματα έχουμε: $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \\ \text{και} \\ |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \end{cases}$

ή αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε: $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{και} \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

Αντίθετα Διανύσματα

Για μη μηδενικά διανύσματα έχουμε: $\vec{\alpha} = -\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \\ \text{και} \\ |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \end{cases}$

ή αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε: $\vec{\alpha} = -\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ \text{και} \\ y_1 = -y_2 \end{cases}$

Παραλληλία (Ομόρροπα-Αντίρροπα)

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1) \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2) \neq \vec{0}$,

- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta},\ \lambda > 0.$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta},\ \lambda < 0.$
- $\vec{\alpha} \parallel x'x \Leftrightarrow y_1 = 0.$
- $\vec{\alpha} \parallel y'y \Leftrightarrow x_1 = 0.$
- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| = |\vec{\alpha}| + \left|\vec{\beta}\right|.$
- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \left|\vec{\beta}\right|.$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \left||\vec{\alpha}| - \left|\vec{\beta}\right|\right| = \left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|.$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \left|\vec{\beta}\right|.$
- Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \nparallel y'y$ τότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, όπου λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα.
- $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$

Καθετότητα

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, τότε:

- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0.$
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1.$

Συνημίτονο Γωνίας Δύο Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε συν $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \dfrac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \left|\vec{\beta}\right|}.$