

Άλγεβρα Α' Λυκείου

Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

5ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Ορισμός

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α .

1. Να αποδείξετε ότι:

$$(α) \sqrt{16} + \sqrt{0,04} + \sqrt{0,64} = 5$$

$$(β) \sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}} = 2$$

$$(γ) \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = 9$$

$$(δ) \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = 6$$

$$(ε) \sqrt{27} - \sqrt{12} = \sqrt{3}$$

$$(ς) \sqrt{20} + \sqrt{5} = \sqrt{45}$$

$$(ζ) \sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{8} = 0$$

$$(η) \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{18}}{\sqrt{12}} = 3$$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$(α) (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$$

$$(β) \sqrt{2} (\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12}) = 2$$

$$(γ) \sqrt{5} \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 5$$

$$(δ) \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2} = 1$$

Σημείωση

$$\sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$$

Σημείωση

Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παράσκει την μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

3. Αν $x = 2 + \sqrt{3}$ και $y = 2 - \sqrt{3}$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$(α) xy$$

$$(β) x^2 + y^2$$

$$(γ) x^2 - y^2$$

$$(δ) x^3 + y^3$$

$$(ε) x^4 - y^4$$

4. (α) Να βρείτε τα αναπτύγματα των

$$(2 + \sqrt{5})^2 \text{ και } (2 - \sqrt{5})^2.$$

(β) Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = 4.$$

5. Αν $\alpha < 0$ και $\beta > 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(α) \sqrt{\alpha^2 \beta^2}$$

$$(β) \sqrt{\alpha^4 \beta^2}$$

6. Να αποδείξετε ότι:

$$(α) \frac{1}{\sqrt{5} - 2} - \frac{1}{\sqrt{5} + 2} = 4$$

$$(β) \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)^2} - \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2} = 4\sqrt{2}$$

Σημείωση

$$\text{Αν } \beta \geq 0, \quad \frac{\sqrt{\alpha^2 \beta}}{|\alpha| \sqrt{\beta}} =$$

7. Αν $1 < x < 3$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = 2.$$

8. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = 2 - \sqrt{3} \quad \text{και} \quad B = 2 + \sqrt{3}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

(Τράπεζα θεμάτων)

9. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $A > 0$

(β) $A^2 = 2$

(γ) $A = \sqrt{2}$

10. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

(α) $\sqrt[5]{1}$

(δ) $\sqrt[5]{32}$

(ζ) $\sqrt[3]{0,001}$

(β) $\sqrt[4]{16}$

(ε) $\sqrt[3]{125}$

(η) $\sqrt[3]{0,027}$

(γ) $\sqrt[3]{64}$

(ς) $\sqrt[3]{1000}$

(θ) $\sqrt[4]{0,0016}$

Ορισμός

Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[n]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην n , δίνει τον α .

Σημείωση

Αν $\alpha \geq 0$,
 $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$

11. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\frac{\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}} = 2$

(β) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17} - 1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17} + 1} = 4$

Σημείωση

Αν $\alpha \leq 0$ και
 n άρτιος,
 $(\sqrt[n]{\alpha})^n = |\alpha|$

12. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

(δ) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[20]{5} = 5$

(β) $\sqrt{25\sqrt{5\sqrt{5}}} = 5 \cdot \sqrt[8]{5^3}$

(ε) $\sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2^8} = 8$

(γ) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt[6]{3^5}$

(ς) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{32} = 4$

Σημείωση

Αν $\alpha > 0$,
 $\mu \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$,
 $\frac{\mu}{n} = \frac{\sqrt[n]{\alpha}^\mu}{\sqrt[n]{\alpha}^\mu}$

Σημείωση

Αν $\alpha \geq 0$,
η $\sqrt[n]{\alpha}$ παρα-
στάει την μη
αρνητική λύση
της εξίσωσης
 $x^n = \alpha$.

13. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = (\sqrt{2})^6, \quad B = (\sqrt[3]{3})^6 \quad \text{και} \quad \Gamma = (\sqrt[6]{6})^6.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $A + B + \Gamma = 23$.

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Σημείωση

$$\frac{\sqrt[n]{\alpha} \sqrt[n]{\beta}}{\sqrt[n]{\alpha\beta}} =$$

$$\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}$$

(Τράπεζα θεμάτων)

“Οι νόμοι της φύσης είναι οι μαθηματικές σκέψεις του Θεού”

Ευκλείδης, 4-3ος αιώνας π.Χ., Αρχαίος Έλληνας μαθηματικός.