

Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

Επανάληψη Ενοτήτων 1.4-1.5

5ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

(α) Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης.

(β) Αν $\frac{\pi}{2} < \widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} < \pi$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$.

(γ) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ομόρροπα, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.

(δ) Ισχύει ότι $\det(\vec{\alpha}, 2\vec{\alpha}) = 2$.

(ε) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.

(ς) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει ότι $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$.

(ζ) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, ισχύει ότι $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2$.

(η) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$, αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

(θ) Αν το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2, τότε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 4$.

2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$, ισχύει ότι: $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$.

(α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές.

(β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

3. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

(α) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 1)$ και $\vec{\beta} = (1, 3)$ είναι κάθετα, τότε ο πραγματικός αριθμός x είναι ίσος με

(β) Δίνονται τα σημεία Α(-1, 5) και Β(-3, 1). Αν το σημείο Μ(x, y) είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε x = και y =

(γ) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα και ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι ίσος με 4, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\beta}$ ισούται με

(δ) Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι

(ε) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, -9)$ και $\vec{\beta} = (-1, \lambda)$ είναι αντίρροπα, τότε ο πραγματικός αριθμός λ είναι ίσος με

Ασκήσεις

1. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι:

$$|\vec{\alpha}| = 1 \quad |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta}).$$

- (α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$.
 (β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
 (γ) Αν $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{u}$.
 (δ) Αν $\vec{w} = \vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε τα διανύσματα $\vec{w}$ και $\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.
2. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $\hat{A} = 60^\circ$.
 Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

$$(α) \vec{AB} \cdot \vec{AD} \quad (β) \vec{AD} \cdot \vec{BF} \quad (γ) \vec{OD} \cdot \vec{AO} \quad (δ) \vec{OD} \cdot \vec{OB} \quad (ε) \vec{AD} \cdot \vec{FD}.$$

3. Δίνονται τα σημεία:

$$A(3, 2), \quad B(-1, -2) \quad \text{και} \quad \Gamma(1, -3).$$

- (α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ ορίζουν τρίγωνο.
 (β) Αν το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.
 (γ) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{AB}$ με τον άξονα $x'x$.
4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, -1)$, $\vec{\beta} = (\lambda + 1, \lambda)$ και $\vec{\gamma} = (1, 1)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του πραγματικού αριθμού λ , τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.
 (β) Αν $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \parallel \vec{\gamma}$, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ .
5. Δίνονται τα σημεία:

$$A(3, 2) \quad \text{και} \quad B(-2, 3).$$

- (α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, όπου Ο η αρχή των αξόνων.
 (β) Να βρείτε σημείο Μ του άξονα $y'y$, τέτοιο, ώστε τα σημεία Α, Μ και Β να είναι συνευθειακά.
6. Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{\alpha} = (3, 4) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (1, 2).$$

- (α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v}$ το οποίο είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο ίσο με 10.
 (β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.
 (γ) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = (1, 4)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
 (δ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{w} = (-7, 24)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

“Τα πράγματα αυτού του κόσμου δεν μπορούν να κατανοηθούν χωρίς τη γνώση των Μαθηματικών”

Bacon Roger, 1214 – 1292, Άγγλος φιλόσοφος.