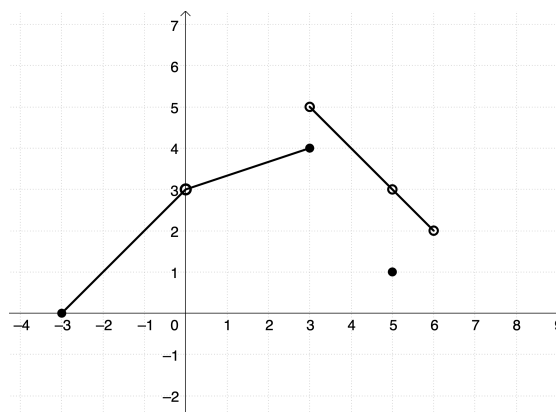


Συνέχεια Συνάρτησης

7ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε:



(α) το πεδίο ορισμού της f

(β) τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

2. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια στο x_0 , τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases},$$

$$x_0 = 0$$

(β)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x - x^2| + x - 9}{x - 3}, & \text{αν } x < 3 \\ \sqrt{x^2 + 7}, & \text{αν } x \geq 3. \end{cases},$$

$$x_0 = 3$$

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$|f(x)| \leq |x|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

4. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x = 0$ και ισχύει:

$$\eta\mu 2x - x^2 \leq xf(x) \leq \eta\mu 2x + x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να βρείτε το $f(0)$.

5. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x - 1} = 5.$$

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, 4)$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 4x + 2 = 0$, έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-3, 2)$.

7. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$e^{x_0} + \ln(x_0 + 1) = 2.$$

8. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$.
Αν $\alpha < 1 < \beta$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x - \alpha} + \frac{f(\beta)}{\beta - x} = 0,$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

(α) υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$,

(β) δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.

10. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) = 2xf(x) + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

(β) Αν $f(0) = 1$, να προσδιορίσετε τον τύπο της f .

11. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 5$ και

$$f(f(x)) + f(x) = 20, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(5) = 15$

(β) $f(10) = 10$.

12. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

13. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{xe^x - 1}{e^x}.$$

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x - 2021)e^x = 1$, έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

“Τα πράγματα αυτού του κόσμου δεν μπορούν να κατανοηθούν χωρίς τη γνώση των Μαθηματικών”

Bacon Roger, 1214 – 1292, Άγγλος φιλόσοφος.

Bolzano:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Σημείωση

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

Θ.Ε.Τ

Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών:
Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ Τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Σημείωση

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Θ.Μ.Ε.Τ

Θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης Τιμής:
Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m . Επίσης, $f([\alpha, \beta]) = [m, M]$