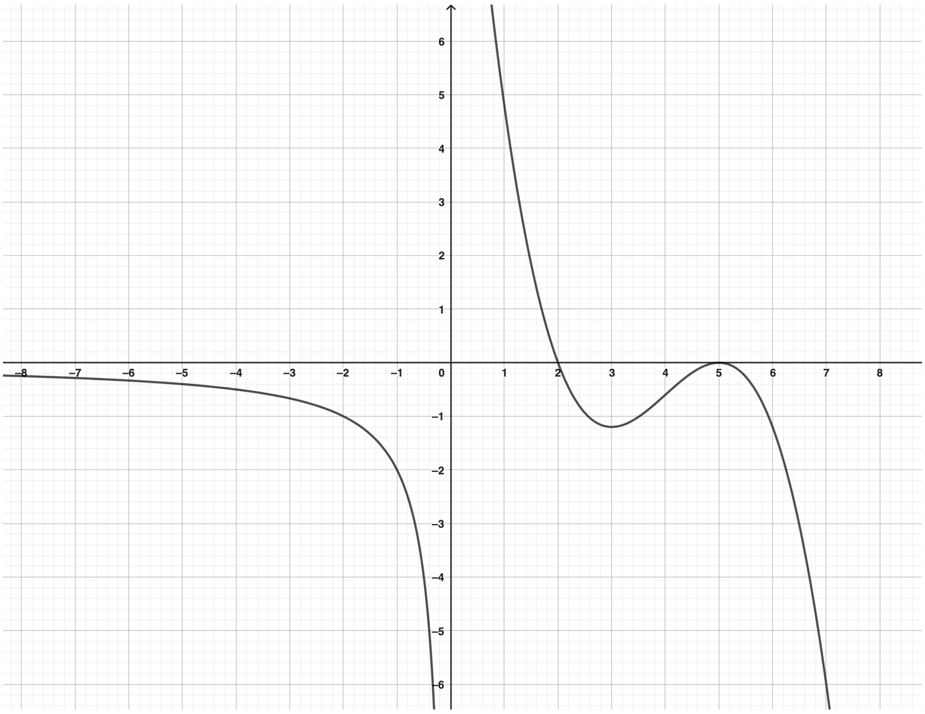
Το Θέμα της Εβδομάδας

Μη Πεπερασμένο Όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Όριο Συνάρτησης στο Άπειρο

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 8ο. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

(α') $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{f(x)}$

(β') $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

(γ') $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x-6}{f(x)}$

(δ') $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{f(x)}$

(ε') $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)}$

(ϛ') $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(f^3(x) - f(x)\right)$

(ζ') $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)+2}{f(x)-2}$

(η') $\lim\limits_{x \to 2} \left(f(x)\,\text{συν}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)\right)$

(ϑ') $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{f^2(x)+1}}{f(x)}$

Λύση.

(α') Είναι $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, οπότε $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

(β') Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, άρα το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

(γ') Είναι $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο 5, άρα $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.
Επίσης, $\lim\limits_{x\to 5}(x-6) = -1$, οπότε

$$\lim_{x\to 5} \frac{x-6}{f(x)} = \lim_{x\to 5}\left((x-6)\cdot\frac{1}{f(x)}\right) = +\infty.$$

(δ') Το όριο δεν υπάρχει, διότι:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty, \quad \text{αφού } \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0 \text{ και } f(x) > 0, \text{ κοντά στο } 2^-$$

και

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty, \quad \text{αφού } \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0 \text{ και } f(x) < 0, \text{ κοντά στο } 2^+.$$

(ε') Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

(ϛ') Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-} \left(f^3(x) - f(x)\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(f(x)\left(f^2(x)-1\right)\right) = -\infty,$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(f^2(x)-1\right) = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f^2(x) = +\infty$.

(ζ') Είναι

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)+2}{f(x)-2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)\left(1+\dfrac{2}{f(x)}\right)}{f(x)\left(1-\dfrac{2}{f(x)}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\dfrac{2}{f(x)}}{1-\dfrac{2}{f(x)}} = \frac{1+0}{1-0} = 1,$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{f(x)} = 0$, διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

(η') Για κάθε $x \neq 2$, ισχύει

$$\left| f(x)\text{συν}\left(\frac{1}{x-2}\right)\right| \leq |f(x)|,$$

διότι $\left|\text{συν}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)\right| \leq 1$.

Οπότε, για κάθε $x \neq 2$, έχουμε $-|f(x)| \leq f(x)\text{συν}\left(\dfrac{1}{x-2}\right) \leq |f(x)|$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}|f(x)| = 0$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left(-|f(x)|\right) = 0$, τότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)\text{συν}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)\right) = 0$.

(θ') Είναι

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{f^2(x)+1}}{f(x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{f^2(x)}\sqrt{1+\dfrac{1}{f(x)}}}{f(x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|f(x)|\sqrt{1+\dfrac{1}{f(x)}}}{f(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-f(x)\sqrt{1+\dfrac{1}{f(x)}}}{f(x)} = \lim_{x\to 0^-}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{f(x)}}\right) = -1,$$

διότι $|f(x)| = -f(x)$ κοντά στο 0^-, αφού $f(x) < 0$ κοντά στο 0^-
και $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.