Επανάληψη 1ου Κεφαλαίου
Όριο-Συνέχεια Συνάρτησης
8ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

(α') Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

(β') Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

(γ') Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

(δ') Αν για δύο συναρτήσεις f και g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά $fog \neq gof$.

(ε') Αν μια συνάρτηση f είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

(ϛ') Κάθε συνάρτηση που είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

(ζ') Μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

(η') Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

(θ') Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\widehat{O}y$ και $x'\widehat{O}y'$.

(ι') Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

(ια') Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

(ιβ') Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

(ιγ') Για την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

(ιδ') Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ιε') Αν $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

(ιϛ') Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{\nu}} = +\infty$, για οποιοδήποτε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

(ιζ') Αν $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

(ιη') Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(ιθ') Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

(κ') Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim\limits_{x\to -\infty} \alpha^x = 0$.

(κα') Ισχύει $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

(κβ') Ισχύει $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x\ \eta\mu\frac{1}{x}\right) = 1$.

(κγ') Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f(\alpha) = 2$ και $f(\beta) = 3$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e$.

(κδ') Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$.

(κε') Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι πάντοτε διάστημα.

(κϛ') Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

(κζ') Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

(κη') Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.

(κθ') Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ έχει σύνολο τιμών το $[f(\alpha), f(\beta)]$ ή το $[f(\beta), f(\alpha)]$.

2. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Κάθε συνάρτηση f *η οποία έχει ολικό μέγιστο, το παρουσιάζει σε μια μόνο θέση* x_0.

   (α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

   (β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

3. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Για κάθε συνάρτηση f, *με* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, *ισχύει ότι:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty \quad \textit{ή} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

   (α') Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

   (β') Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

4. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Κάθε συνάρτηση f *η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα* Δ *παίρνει στο* Δ *μία μέγιστη τιμή* M *και μια ελάχιστη τιμή* m.

(α΄) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

(β΄) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α΄).

5. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Για κάθε συνάρτηση $\mathrm{f} : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$, *όταν υπάρχει το όριο της* f *καθώς το* x *τείνει στο* $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{A}$, *τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της* f *στο* x_0.

   (α΄) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

   (β΄) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α΄).

Θέματα

1. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $\mathrm{f(x)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{x}} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty} \mathrm{f(x)} = 2$.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

   (β΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{f(x)} - \mathrm{x} = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$.

   (γ΄) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της.

   (δ΄) Να σχεδιάσετε (πρόχειρα) τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

2. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 + 2$.
Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

   (α΄) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to1} \dfrac{\mathrm{f(x)} - 3}{\mathrm{x}^3 - 1}$

   (β΄) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to1} \dfrac{\mathrm{f(x)}}{|\mathrm{x} - 1|}$

   (γ΄) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-1} \dfrac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{x} + 1}$

   (δ΄) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} \dfrac{|-\mathrm{x}^2 + \mathrm{x}| - \mathrm{f(x)}}{\mathrm{x}^3 + 2}$

   (ε΄) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} \left(\sqrt{\mathrm{f(x)}} + \mathrm{x}\right)$

   (ϛ΄) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to+\infty} \dfrac{\eta\mu \mathrm{x}}{\mathrm{f(x)}}$

   (ζ΄) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to-\infty} \mathrm{x}^2 \cdot \eta\mu \left(\dfrac{1}{\mathrm{f(x)} - 2}\right)$

   (η΄) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to0} \dfrac{\ln\left(\mathrm{f(x)} - 2\right)}{\mathrm{f(x)} - 2}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f} : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^4 - 2\mathrm{x}^2 + 1$ και η συνάρτηση $\mathrm{g} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $\mathrm{g(x)} = \sqrt{\mathrm{x}}$.

   (α΄) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\mathrm{h} = \mathrm{fog}$.

   (β΄) Αν $\mathrm{h(x)} = (\mathrm{x} - 1)^2,\ \mathrm{x} \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι $1-1$ και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h.

   (γ΄) Έστω $\mathrm{h}^{-1}(\mathrm{x}) = 1 - \sqrt{\mathrm{x}},\ \mathrm{x} \in [0, 1]$.
   Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\phi(\mathrm{x}) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{h}^{-1}(\mathrm{x})}{1 - \mathrm{x}} & , \ \mathrm{x} \in [0, 1) \\[2ex] \dfrac{1}{2} & , \ \mathrm{x} = 1 \end{cases} .$$

i. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση ϕ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\phi(x_0) =$ ημα, όπου $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

(Θέμα Β, Πανελλαδικές Εξετάσεις 2022)

4. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,\pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε:

$$(gof)(x) = |\text{συν}x|, \quad \text{για κάθε } x \in [0,\pi].$$

(α΄) i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\text{ημ}x|$.

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(β΄) Να βρείτε την συνάρτηση f.

(γ΄) Δίνεται η συνάρτηση $h : (0,\pi] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x)-x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0} h(x)$.

(Τράπεζα θεμάτων)

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x-3},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

(α΄) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ στο $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

(β΄) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

(γ΄) Να αποδείξετε ότι $(fof)(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

(δ΄) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \left(f(x)\text{ημ}\left(\frac{1}{3x+1}\right)\right)$.

(Θέμα Β, Πανελλαδικές Εξετάσεις 2020)

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(fog)(x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α΄) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = -1$.

(β΄) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι $1-1$ και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

(γ΄) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1}of$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\phi(x) = \sqrt{(g^{-1}of)(x)}$.

(δ΄) Έστω η συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(x) + 2 \leq h(x) \leq g(x) + 2, \quad \text{για κάθε } x \in [0,1].$$

i. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 1} h(x) = 2$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}$.

(Θέμα Β, Επαναληπτικές Πανελλαδικές Εξετάσεις 2020)

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$ και συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(g \circ f)(x) = \frac{2x+2}{x+2},\ x > -1$.

(α') Να αποδείξετε ότι η $g(x) = \dfrac{2e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(β') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και στη συνέχεια να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση g^{-1}.

(γ') Αν $g^{-1}(x) = \ln(\dfrac{x}{2-x})$, $x \in (0,2)$, να βρείτε την μονοτονία της $g^{-1}(x)$.

(δ') Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της g^{-1} με την ευθεία $\epsilon : y = -x+1$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e^{-x} + x$.

(α') Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(β') Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

(γ') Να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^{2x} + xe^x\right) < \dfrac{e^2+e-1}{e}$.

(δ') Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (-\infty, 0)$, τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \ln(1-x_0)$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \dfrac{e}{x}$.

(α') Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο, το οποίο και να βρείτε.

(β') Να λύσετε την εξίσωση: $x^x = e^e$, $x > 0$.

(γ') Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} (g(x)f(x))$ ii. $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(2^x+3^x) - x)$

10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-x}{\sqrt{x+1}-1} = 8.$$

(α') Να βρείτε το $f(0)$.

(β') Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) + x_0^3 = 2e^{-x_0}.$$

(γ') Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\eta\mu 2x}$.

11. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{με} \quad |xf(x) - \eta\mu x| \le x^2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{με} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-2|-2}{x}, & \text{αν } x > 0 \\ f(x) + \alpha, & \text{αν } x \le 0 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(α') Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$.

(β') Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$.

(γ') Αν $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, συνεχής συνάρτηση με $h(0) = -\frac{1}{2}$ και $h(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$h(x) = (1 - x)g(x),$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

12. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(α') Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

(β') Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i. $\lim_{x\to 1} f(x)$
ii. $\lim_{x\to 3} f(x)$
iii. $\lim_{x\to 5} f(x)$
iv. $\lim_{x\to 7} f(x)$
v. $\lim_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

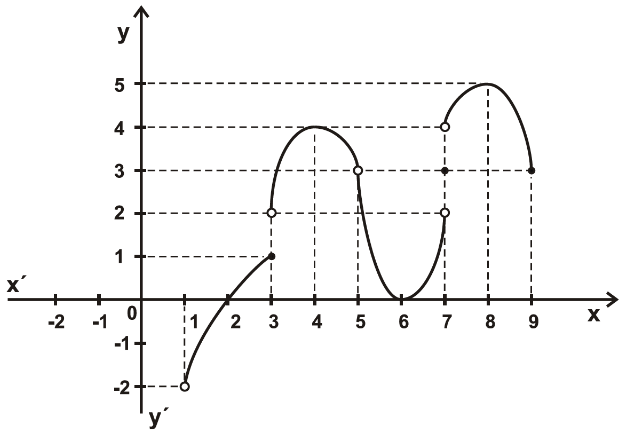
(γ') Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{f(x)}$
ii. $\lim_{x\to 6} \frac{1}{f(x)}$
iii. $\lim_{x\to 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

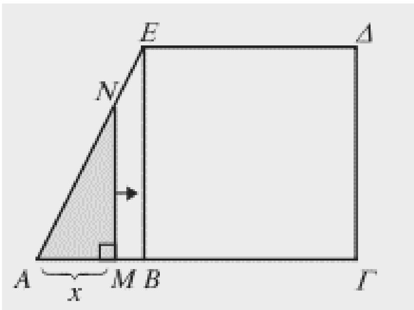
(δ') Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Θέμα Β, Επαναληπτικές Πανελλαδικές Εξετάσεις 2016)

13. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = 1$, $A\Gamma = 3$ και $\Gamma\Delta = 2$.
Το σημείο M κινείται και διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$.
Έστω $AM = x$ και $E(x)$ το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.



(α') Να αποδείξετε ότι $(MN) = 2x$, με $0 < x \leq 1$.

(β') Να αποδείξετε ότι $E(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ αν } 0 < x \leq 1 \\ 2x - 1 & , \text{ αν } 1 < x \leq 3 \end{cases}$.

(γ') Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση E αντιστρέφεται και στη συνέχεια να ορίσετε την αντίστροφη της E^{-1}.

(δ') Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων E και E^{-1}.

Καλά και Ευτυχισμένα Χριστούγεννα !!!
2023 ευχές για ένα ευτυχισμένο και δημιουργικό νέο έτος !!!