

Το Θέμα της Εβδομάδας

Συνέχεια Συνάρτησης

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 10ο. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x + \ln(x+1)$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης g .

(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-1, +\infty)$ τέτοιο ώστε

$$e^{x_0} = \ln \frac{1}{x_0 + 1}.$$

(γ) Αν $\alpha \in (-1, x_0)$ και $\beta \in (x_0, +\infty)$, όπου x_0 ο πραγματικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{g(\alpha)}{1-\alpha} + \frac{g(\beta)}{\beta-2} = 0,$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

(δ) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση

$$f^2(x) = g^2(x), \quad \text{για κάθε } x \in (-1, +\infty).$$