

Επανάληψη 2ου Κεφαλαίου
Φύλλο Χριστουγέννων
6ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Αγαπητά μου παιδιά, εύχομαι οι παρακάτω ασκήσεις, να αποτελέσουν μια όμορφη μαθηματική συντροφιά τις γιορτινές αυτές ημέρες και να γίνουν αφορμή για μια μικρή επανάληψη. Να προσπαθήσετε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις, αφού πρώτα μελετήσετε τις σημειώσεις των τετραδίων σας. Καλή δύναμη!

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

- (α) Αν $\alpha < 0$, τότε $|\alpha| = \alpha$.
(β) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$.
(γ) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < 0$, τότε $\alpha^2 < \beta^2$.
(δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $\sqrt{(-x)^2} = |x|$.
(ε) Αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $x^2 + y^2 > 0$, τότε $x \neq 0$ ή $y \neq 0$.
(ς) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$.
(ζ) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε $|\alpha| \geq 0$.
(η) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\alpha^2 \geq 0$.
(θ) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $|\alpha| \geq -\alpha$.
(ι) Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $x \leq \alpha$ συμβολίζεται με $(-\infty, \alpha]$.
(ια) Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$.
(ιβ) Ισχύει $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[8]{6}$.
(ιγ) Αν $|\alpha| = |\beta|$, τότε $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$.

2. Χρησιμοποιώντας κάποιο κατάλληλο αντιπαράδειγμα να δείξετε ότι η παρακάτω πρόταση δεν ισχύει:

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \gamma$ και $\beta > \delta$, ισχύει ότι $\alpha - \beta > \gamma - \delta$.

3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

(α) Αν $|x| > 5$, τότε ισχύει:

A. $x = 5$

B. $x = -5$

Γ. $x \in (-5, 5)$

Δ. $x \in (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$

(β) Η παράσταση $\sqrt{5} + \sqrt{5}$ είναι ίση με:

- A. $\sqrt{10}$ B. 5 Γ. $\sqrt{5}$ Δ. $\sqrt{20}$.

(γ) Η τιμή της παράστασης $(\sqrt{5})^2$ είναι ίση με:

- A. 25 B. 5 Γ. $\sqrt{5}$ Δ. $2\sqrt{5}$

(δ) Αν $3 < x < 4$ τότε η παράσταση $\frac{|x-4|}{x-4} + \frac{|x-3|}{x-3}$ είναι ίση με:

- A. 2 B. 0 Γ. 4 Δ. -2.

Ασκήσεις

1. (α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10.$$

(β) Να βρείτε τους αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

2. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $4 \leq y \leq 6$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

- (α) $x + y$ (β) $2x - 3y$ (γ) $\frac{x}{y}$

3. Δίνεται η παράσταση $A = |3x - 6| + 2$, όπου x πραγματικός αριθμός.

(α) Να αποδείξετε ότι:

- i. για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$, ii. για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$.

(β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$.

(Τράπεζα θεμάτων)

4. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$.

(α) Να αποδείξετε ότι $x \in (-1, 5)$.

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 10x + 25}}{3}$.

5. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

(α) Να δείξετε ότι: $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$.

(β) Να δείξετε ότι: $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

(γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

(Τράπεζα θεμάτων)

6. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

(α') Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(β') Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$.

(Τράπεζα θεμάτων)

7. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}.$$

(α') Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

(β') Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = \frac{\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta - \beta \cdot \gamma}$.

(Τράπεζα θεμάτων)

8. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \quad \text{και} \quad |y - 6| \leq 4.$$

(α') Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

(β') Να βρεθεί η μικρότερη και μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογώνιου με διαστάσεις $2x$ και y .

(Τράπεζα θεμάτων)

9. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2\alpha + 1, \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(α') Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $K = 0$.

(β') Να αποδείξετε ότι $K + \Lambda \geq 0$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(γ') Να βρείτε την σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $K + \Lambda = 0$.

10. Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

(α') Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$.

(β') Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$,

i. Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

(Τράπεζα θεμάτων)

11. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, και $\Gamma = \sqrt[6]{5}$.

(α') Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.

(β') Να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B .

(Τράπεζα θεμάτων)

12. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

(α') Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.

(β') Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(γ') Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Τράπεζα θεμάτων)

Καλά και Ευτυχισμένα Χριστούγεννα!!!

2023 ευχές για ένα ευτυχισμένο και δημιουργικό νέο έτος!!!