

# Η Έννοια της Παραγώγου

## Παράγωγος Συνάρτησης-Κανόνες Παραγώγισης

### 9ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0 = 0$ , οι παρακάτω συναρτήσεις:

(α)  $f(x) = |x|\eta\mu x$

(β)  $g(x) = x^2 - |x| + 1$

(γ)  $f(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

2. Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 5} - 2} = 2.$$

Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 3$ , να αποδείξετε ότι:

(α)  $f(3) = 0$

(β)  $f'(3) = 3$ .

3. Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιεί τη σχέση

$$2x\eta\mu x \leq xf(x) \leq \eta\mu^2 x + x^2.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α)  $f(0) = 0$

(β)  $f'(0) = 2$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x + \alpha^2, & x < 1 \\ 2\alpha\sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$  για τις οποίες η συνάρτηση είναι:

(α) συνεχής στο  $x_0 = 1$

(β) παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ .

5. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών  $\alpha, \beta$  για τις οποίες η συνάρτηση  $f(x) =$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta, & x < -1 \\ x^2 - x + 1, & x \geq -1 \end{cases} \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = -1.$$

6. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης  $f(x) = x^4 + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , η οποία είναι:

**Σημείωση**

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  και είναι πραγματικός αριθμός.

**Θεώρημα σελ.**

Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

**Σημείωση**

Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

(α) παράλληλη στην  $\epsilon : y = x + 2$ , (β) κάθετη στην  $\eta : x + 5y = 0$ .

7. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & x > 1 \\ x^2 + 1, & x \leq 1 \end{cases}$

- (α) Να βρείτε την συνάρτηση  $f'$ .  
 (β) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία  $y = -\frac{1}{4}x + 2020$ .

8. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = xe^x + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , η οποία σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $\omega = \frac{\pi}{4}$ .

9. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x$ ,  $x > 0$ .

- (α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $A(1, 0)$ .  
 (β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $O(0, 0)$ .  
 (γ) Να βρείτε τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$                       ii.  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$ .

10. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και η ευθεία ( $\epsilon$ ) με εξίσωση  $y = 2x - 2$ . Να αποδείξετε ότι :

- (α) η ευθεία ( $\epsilon$ ) έχει ακριβώς δύο κοινά σημεία με τη  $C_f$ ,  
 (β) η ευθεία ( $\epsilon$ ) εφάπτεται στη  $C_f$  σε ένα από τα παραπάνω σημεία.

11. Να εξετάσετε αν η ευθεία  $\epsilon : y = 5x - 10$  εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^3 - 7x + 6$ .

12. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x - 2)\ln(x - 1)$ ,  $x > 1$ . Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  εφάπτεται στον άξονα  $x'x$ .

13. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  στα οποία οι εφαπτομένες ευθείες να είναι μεταξύ τους παράλληλες.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = x^2 + 6$  και  $g(x) = -x^2 + 4x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .  
 Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των  $C_f$  και  $C_g$ .

15. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (-1, 2)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο της  $M(x_0, f(x_0))$  να διέρχεται από το σημείο  $A(1, 0)$ .

**Σημείωση**  
 Όταν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι η ευθεία με εξίσωση  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ .

**Σημείωση**  
 Η ευθεία  $\epsilon : y = \lambda x + \beta$  εφάπτεται της  $C_f$  στο κοινό τους σημείο  $A(x_0, y_0)$  αν  $f'(x_0) = \lambda$ .

**Σημείωση**  
 $C_f$  εφάπτεται του  $x'x$  αν και μόνο αν υπάρχει  $x_0 \in D_f$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = 0$  και  $f'(x_0) = 0$ .

**Σημείωση**  
 Η ευθεία  $\epsilon : y = \alpha x + \beta$  είναι εφαπτομένη της  $C_f$  αν υπάρχει  $x_0 \in D_f$  τέτοιο, ώστε:  $f(x_0) = \alpha x_0 + \beta$  και  $f'(x_0) = \alpha$ .

“Τα Μαθηματικά, περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη τέχνη ή επιστήμη, είναι ένα παιχνίδι για νεαρή ηλικία”

Hardy, Godfrey Harold, 1877 – 1947, Άγγλος μαθηματικός.