Το Θέμα της Εβδομάδας

Όρια-Συνέχεια Συνάρτησης

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 9ο. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\kappa - 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ \dfrac{\text{ημ}x}{x} - 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

(α') Να αποδείξετε ότι $\kappa = \dfrac{1}{2}$.

(β') Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ετερόσημοι αριθμοί α και β τέτοιοι, ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$.

(γ') Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, **ii.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, **iii.** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) + x + \text{ημ}x}{\sqrt{x+1} - 1}$.

Λύση. (α') Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής και στο $x = 0$. Οπότε:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \\ &\lim_{x\to 0^-} \left(x^2 + 2\kappa - 1\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\text{ημ}x}{x} - 1\right) = 2\kappa - 1 \Leftrightarrow \\ &2\kappa - 1 = 1 - 1 \Leftrightarrow \\ &\kappa = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(β') Έχουμε ότι

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ αν } x \leq 0 \\ \dfrac{\text{ημ}x}{x} - 1 & , \text{ αν } x > 0 \end{cases}.$$

Υποθέτουμε ότι $\alpha < 0$ και $\beta > 0$. Τότε:

$$f(\alpha) = \alpha^2 > 0 \quad \text{και} \quad f(\beta) = \frac{\text{ημ}\beta}{\beta} - 1 < 0,$$

διότι $\dfrac{\text{ημ}\beta}{\beta} < 1$, αφού για $\beta > 0$ είναι $-\beta < \text{ημ}\beta < \beta$.

Άρα, αν α και β ετερόσημοι, τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

(γ') **i.**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\text{ημ}x}{x} - 1\right) = 0 - 1 = -1,$$

διότι:
για $x > 0$, ισχύει ότι $\left|\frac{ημx}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$, αφού $|ημx| \leq 1$.
Άρα,

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{ημx}{x} \leq \frac{1}{x}, \quad \text{για κάθε} \quad x > 0.$$

Οπότε, αφού $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ και $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{1}{x} = 0$, τότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{x \to +\infty}\frac{ημx}{x} = 0.$$

ii.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty.$$

iii.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^-}\frac{f(x) + x + ημx}{\sqrt{x+1} - 1} &= \lim_{x \to 0^-}\frac{x^2 + x + ημx}{\sqrt{x+1} - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0^-}\frac{\left(x^2 + x + ημx\right)\left(\sqrt{x+1} + 1\right)}{\left(\sqrt{x+1} - 1\right)\left(\sqrt{x+1} + 1\right)} \\
&= \lim_{x \to 0^-}\left(\frac{x^2 + x + ημx}{x}\left(\sqrt{x+1} + 1\right)\right) \\
&= \lim_{x \to 0^-}\left(\left(x + 1 + \frac{ημx}{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + 1\right)\right) \\
&= (0 + 1 + 1)(\sqrt{0+1} + 1) \\
&= 4.
\end{aligned}$$