

Διαγώνισμα Α' Τετραμήνου

Κεφάλαιο 1ο: Συναρτήσεις

Διάρκεια Εξέτασης: Δύο (2) διδακτικές ώρες

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

11 Ιανουαρίου 2023

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \eta.$$

Μονάδες 8

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = 0$.

β) Ισχύει $|\eta \mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

γ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι πάντα διάστημα.

δ) Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

Μονάδες 8

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = -(x - 1)^2 + 3 \text{ και}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = 3 - x^2.$$

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφη της είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x) = \sqrt{3 - x} + 1, \quad x \in (-\infty, 3].$$

Μονάδες 9

B2. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$.

Μονάδες 10

B3. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x) - 3}{|x| - 1}.$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 + e^\lambda & , \text{ αν } x \leq 0 \\ x^3 - x - \lambda & , \text{ αν } x > 0 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.

Μονάδες 8

Γ2. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο στο $x_0 = 2$ της συνάρτησης $h : (0, 2) \cup (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$h(x) = \frac{f(x)}{x - 2}.$$

Μονάδες 8

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1 - x^3} \right).$$

Μονάδες 9

Θέμα Δ

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $|f(x)| = e^x + \sqrt{x}$, για κάθε $x \geq 0$,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sin x}{x} = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = -1$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = -e^x - \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 7

Δ4. Αν $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{1+f(\beta)}{x-2} = 0,$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Μονάδες 7

Σας εύχομαι επιτυχία!

*“Μην καταδέχεσαι να ρωτάς:
Θα νικήσουμε; Θα νικηθούμε;
Πολέμα!”*

Νίκος Καζαντζάκης, 1883 – 1957, Έλληνας συγγραφέας.