

Το Θέμα της Εβδομάδας

Συνέχεια Συνάρτησης

Η Έννοια της Παραγώγου

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 11ο. Δίνεται η συνεχής και $1-1$ συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1 - \sin x}{x} = 2.$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(0) = 0$

ii. $f'(0) = 2$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu x)}{\eta \mu(f(x))} = 1.$

(β) Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}.$$

(γ) Αν η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$ τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f^2(x)}{2-x} = f'(x)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.