Το Θέμα της Εβδομάδας

Συνέχεια Συνάρτησης

Η Έννοια της Παραγώγου

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 11ο. Δίνεται η συνεχής και $1-1$ συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1-\text{συν}x}{x}=2.$$

(α') Να αποδείξετε ότι:

i. $f(0)=0$

ii. $f'(0)=2$

iii. $\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\text{ημ}x\right)}{\text{ημ}\left(f(x)\right)}=1.$

(β') Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}.$$

(γ') Αν η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$ τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f^2(x)}{2-x}=f'(x)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,2)$.

Λύση.

(α') i. Θέτουμε

$$\frac{f(x)+1-\text{συν}x}{x}=g(x),\ \ x\neq 0.$$

Τότε,

$$f(x)=xg(x)+\text{συν}x-1,\ \ x\neq 0.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}f(x)&=\lim_{x\to 0}\left(xg(x)+\text{συν}x-1\right)\\&=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}g(x)+\lim_{x\to 0}\left(\text{συν}x-1\right)=0\cdot 2+(1-1)=0.\end{aligned}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x=0$, τότε $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0$.

ii. Για κάθε $x\neq 0$, έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\frac{xg(x)+\text{συν}x-1}{x}=g(x)+\frac{\text{συν}x-1}{x}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(g(x)+\frac{\text{συν}x-1}{x}\right)=2+0=2.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=2$.

iii. Για $x \neq 0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu(f(x))}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{\eta\mu f(x)}\right)=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=1,$$

διότι:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}\underset{(\alpha')\text{ii}}{=}2$, αφού αν θέσουμε $\eta\mu x = u$, έχουμε ότι καθώς το x τείνει στο 0, τότε το u τείνει στο 0,
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$,
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\frac{f(x)}{x}}\underset{(\alpha')\text{ii}}{=}\dfrac{1}{2}$,
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu f(x)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\eta\mu u}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{\frac{\eta\mu u}{u}}=\dfrac{1}{1}=1$, αφού αν θέσουμε $f(x) = u$, έχουμε ότι καθώς το x τείνει στο 0, τότε το u τείνει στο 0.

(β') Για $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\frac{f(x)-f(0)+f(0)-f(-x)}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{f(-x)-f(0)}{x}$$
$$=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}.$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}\underset{u=-x}{=}\lim_{u\to 0}\frac{f(u)-f(0)}{u-0}=f'(0)=2.$$

Οπότε,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}\right)=2+2=4.$$

(γ') Η εξίσωση $\dfrac{f^2(x)}{2-x}=f'(x)$, στο ανοικτό διάστημα $(0,2)$ είναι ισοδύναμη, δηλαδή έχει τις ίδιες ρίζες, με την εξίσωση

$$(2-x)\frac{f^2(x)}{2-x}=(2-x)f'(x)\Leftrightarrow f^2(x)+(x-2)f'(x)=0.$$

Έστω $h(x)=f^2(x)+(x-2)f'(x)$, $x\in[0,2]$.
Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων (f' συνεχής στο $[0,2]$ από την υπόθεση).
Επίσης,
$h(0)=f^2(0)-2f'(0)=-2f'(0)=-4<0$ και
$h(2)=f^2(2)+(2-2)f'(0)=f^2(2)>0$, διότι $f(2)\neq 0=f(0)$, αφού η συνάρτηση f είναι $1-1$.
Οπότε, $h(1)\cdot h(2)<0$.
Οπότε, από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$.
Άρα, η εξίσωση $f^2(x)+(x-2)f'(x)=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.
Επομένως και η εξίσωση $\dfrac{f^2(x)}{2-x}=f'(x)$, που είναι ισοδύναμη με την παραπάνω, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.