Το Θέμα της Εβδομάδας

Συνέχεια Συνάρτησης

Εφαπτομένη C_f - Ρυθμός Μεταβολής

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 14ο. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3$.

(α') Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-2, f(-2))$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

(β') Έστω $(\epsilon) : y = 3x - 2$ η μία από τις δύο εφαπτομένες του ερωτήματος (α'). Έστω ακόμα (ζ) ευθεία η οποία είναι παράλληλη στην (ϵ) και διέρχεται από το σημείο $M(0, \alpha)$ με $-2 < \alpha < 2$. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα στις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$ υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο τομής της (ζ) με τη γραφική παράσταση της f.

(γ') Ένα υλικό σημείο $M\left(x, x^3\right)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$. Το σημείο M ξεκινά από το σημείο $N(-2, -8)$ και καταλήγει στην αρχή των αξόνων O. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του;

Λύση.

(α') Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f δινεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) &\Leftrightarrow y - x_0^3 = 3x_0^2(x - x_0) \\ &\Leftrightarrow y = 3x_0^2 x - 2x_0^3 \end{aligned}$$

Επειδή διέρχεται από το σημείο $N(-2, f(-2))$, τότε

$$\begin{aligned} f(-2) = 3x_0^2 \cdot (-2) - 2x_0^3 \Leftrightarrow -8 = -6x_0^2 - 2x_0^3 &\Leftrightarrow 2x_0^3 + 6x_0^2 - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0^3 + 3x_0^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_0 - 1)(x_0 + 2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = -2. \end{aligned}$$

Επίσης, $f'(1) = 3$ και $f'(-2) = 12$. Οπότε, οι ζητούμενες εφαπτομένες της C_f, έχουν εξισώσεις:

$$y - 1 = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x - 2 \text{ και } y + 8 = 12(x + 2) \Leftrightarrow y = 12x + 16.$$

(β') Η ευθεία (ζ) που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\epsilon) : y = 3x - 2$ και διέρχεται από το σημείο $M(0, \alpha)$ έχει εξίσωση:

$$(\zeta) : y = 3x + \alpha, \quad \alpha \in (-2, 2).$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x^3 - 3x - \alpha$, $\alpha \in (-2, 2)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-1, 1)$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = x^3 - 3x - \alpha$, $x \in [-1, 1]$ και $\alpha \in (-2, 2)$. Έχουμε: η συνάρτηση g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-1, 1]$ ως πολυωνυμική,

$g(-1) = -1 + 3 - \alpha = 2 - \alpha > 0$

$g(1) = 1 - 3 - \alpha = -2 - \alpha < 0$

άρα $g(-1) \cdot g(1) < 0$.

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3x_0 + \alpha.$$

(γ') Από την υπόθεση έχουμε $x(t) \in (-2, 0)$ και $x'(t) > 0$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του. Οπότε, έχουμε

$$\begin{aligned} x'(t_0) = 3y'(t_0) &\Leftrightarrow x'(t_0) = 3 \cdot 3 \cdot x^2(t_0) \cdot x'(t_0) \\ &\underset{x'(t_0)>0}{\Leftrightarrow} 1 = 9x^2(t_0) \\ &\Leftrightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{9} \\ &\Leftrightarrow x(t_0) = \frac{1}{3} \text{ ή } x(t_0) = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Όμως, $x(t) \in (-2, 0)$. Άρα, δεκτή τιμή είναι $x(t_0) = -\dfrac{1}{3}$.

Οπότε, $y(t_0) = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^3 = -\dfrac{1}{27}$.

Άρα, το ζητούμενο σημείο στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του είναι το σημείο με συντεταγμένες $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{27}\right)$.