

Επαναληπτικές Ασκήσεις Η Ευθεία στο Επίπεδο 8ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπής

1. Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(-3, 2)$ και $\Gamma(1, -3)$.

(α') Να αποδείξετε ότι τα σημεία ορίζουν τρίγωνο.

(β') Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(γ') Να βρείτε την απόσταση του σημείου Γ από την πλευρά AB .

2. Δίνεται η ευθεία $\epsilon: -x + y - 2 = 0$ και τα σημεία $A(-5, -1)$ και $B(-3, 5)$.

(α') Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς το σημείο B .

(β') Να βρείτε:

- i. την εξίσωση της ευθείας ϵ' που διέρχεται από το B και είναι κάθετη στην ϵ ,
- ii. το σημείο τομής των ευθειών ϵ και ϵ' ,
- iii. το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία ϵ .

3. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις:

$$\epsilon_1: \lambda x + (\lambda - 1)y - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \epsilon_2: 4x + \lambda y + \lambda - 2 = 0.$$

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε:

(α') $\epsilon_1 \parallel y'y$

(β') $\epsilon_1 \parallel x'x$

(γ') $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$

(δ') $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$.

4. Δίνεται η εξίσωση

$$(\alpha - 3)x + (\alpha + 1)y - \alpha - 1 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

και η ευθεία

$$\eta: x - y + 10 = 0.$$

(α') Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή που διέρχεται από σταθερό σημείο, του οποίου να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες.

(β') Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , για την οποία η ευθεία ϵ που ορίζεται από την εξίσωση (1), είναι παράλληλη στην ευθεία η .

(γ') Αν η ευθεία ϵ του ερωτήματος (β') ορίζεται από την εξίσωση (1) για $\alpha = 1$, τότε:

- i. να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των παράλληλων ευθειών η και ϵ ,
- ii. να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών ϵ και η .

5. Έστω τα σημεία :

$$A(0, 2) \text{ και } B(4, 6)$$

και η ευθεία

$$\epsilon : x - 2y + 2 = 0.$$

- (α') Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB.
- (β') Να βρείτε το σημείο της ευθείας ϵ το οποίο ισαπέχει από τα A και B.
- (γ') Να βρείτε τα σημεία M της ευθείας ϵ για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου MAB είναι ίσο με 4 τ.μ.

6. Θεωρούμε το σημείο $\Gamma(-1, 2)$ και τα μεταβλητά σημεία :

$$A(\lambda + 1, 2\lambda) \text{ και } B(2 - \lambda, 4), \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (α') Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ τα σημεία σχηματίζουν τρίγωνο.
- (β') Αν $(AB\Gamma) = 3$ τ.μ, να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$ ή $\lambda = 2$.

7. Δίνονται οι ευθείες :

$$\epsilon_1 : 3x - y - 1 = 0, \quad \epsilon_2 : x + 3y - 7 = 0 \text{ και } \epsilon_3 : \lambda x + (\lambda - 1)y - 4 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (α') Αν οι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ .
- (β') Αν $\lambda = 2$, να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_3 .

8. Δίνεται σημείο $A(-5, 5)$. Να βρείτε :

- (α') την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και
 - i. είναι κάθετη στον άξονα $x'x$,
 - ii. έχει συντελεστή διεύθυνσης τον πραγματικό αριθμό λ ,
- (β') τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο A και απέχουν από το σημείο $B(-3, 4)$ απόσταση ίση με 1.

9. Δίνονται τα σημεία :

$$A(2, 0) \text{ και } B(3, 4)$$

και ο πραγματικός αριθμός λ .

- (α')
 - i. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και έχουν κλίση λ .
 - ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο A, έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B, έχει εξίσωση $\epsilon : 15x - 8y - 30 = 0$.
- (β') Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία ζ , εκτός από την ϵ , η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B.
- (γ') Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ϵ και ζ .

10. Θεωρούμε τα σταθερά σημεία :

$$A(3, 4), B(2, 5) \text{ και } \Gamma(-2, 2)$$

και το μεταβλητό σημείο

$$M(4\alpha - 1, 3\alpha + 1), \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (α') Να αποδείξετε ότι τα A , B και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.
- (β') Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$.
- (γ') Να αποδείξετε ότι τα σημεία M κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$.
- (δ') Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου M ισχύει $(MB\Gamma) = (AB\Gamma)$. Πώς αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά ;

11. Δίνονται τα σημεία

$$A(1, 3) \text{ και } B(-2, 2)$$

και η ευθεία

$$\epsilon : 3x + y + \alpha = 0, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (α') Να βρείτε για ποια τιμή του α , η απόσταση του σημείου A από το σημείο B είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ϵ .
- (β') Για $\alpha = 4$,
 - i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ είναι το σημείο τομής της ευθείας ϵ με τον άξονα $y'y$.
 - ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ϵ που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

12. Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία :

$$A(1, -1), B(2, 2) \text{ και } \Gamma(\mu - 1, 3\mu - 2), \mu \in \mathbb{R}.$$

- (α') Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία $\epsilon : y = 3x + 1$.
- (β') Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$, τα σημεία A, B και Γ είναι κορυφές τριγώνου.
- (γ') Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι σταθερό.
- (δ') Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο B και από τις οποίες το σημείο A , απέχει απόσταση ίση με 1.

“ Αυτό που αγάπησα στα Μαθηματικά, είναι το ότι οι αποδείξεις μιλούν από μόνες τους. Δεν χρειάζεται να παρουσιάσεις διαπιστευτήρια για αυτές και να πείσεις τους άλλους για την εγκυρότητα τους. Όλα είναι εκεί, μπροστά σου. ”

Du Sautoy, Marcus Peter Francis, 1965- , Άγγλος μαθηματικός.