

Το Θέμα της Εβδομάδας

Συνέχεια-Παράγωγος

Εφαπτομένη της C_f -Θεώρημα του Rolle

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Θέμα 15ο. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad \text{με } \alpha < -3.$$

- (α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
- (β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.
- (γ) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$.
- (δ) Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Λύση.

- (α) Στο διάστημα $(-\infty, 0)$, η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο διάστημα $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$, η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι συνεχής.

Εξετάζουμε τη συνέχεια της συνάρτησης f στο $x_0 = 0$:

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = \sin 0 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$$

$$f(0) = \alpha \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 0 + 1 = 1.$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Άρα, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(\alpha x^2 - 3x - 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x^2 - 3x - 1) = -1 \end{aligned}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 1}{x} = 0.$$

Άρα, η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

- (β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = (\sin x)' = -\eta\mu x$ και είναι $f(0) = 1 \neq 0 = f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Άρα, ικανοποιούνται οι δύο πρώτες προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, αλλά δεν ικανοποιείται η τρίτη προϋπόθεση.

- (γ) Για $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε ότι $\eta\mu x < 0$, άρα $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0$ είναι αδύνατη.

Για $x \in (0, \pi)$ έχουμε ότι $\eta\mu x > 0$, άρα $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0$ είναι αδύνατη.

Αφού $f'(\pi) = \eta\mu\pi = 0$, το $x = \pi$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f'(x) = 0$ στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$.

- (δ) Οι τετμημένες των σημείων της C_f στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f'(x) = 0$ με $x < 0$.
Για $x < 0$, είναι

$$f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1.$$

Οπότε, έχουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha x^2 - 6x - 1 = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού με άγνωστο το x και διακρίνουσα $\Delta = 36 + 12\alpha = 12(\alpha + 3) < 0$, αφού δίνεται ότι ισχύει $\alpha < -3$.

Η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(-\infty, 0)$, άρα η C_f δεν έχει σημεία με αρνητικές τετμημένες στα οποία η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.