

## Το Θέμα της Εβδομάδας

Συνέχεια-Πράγωγος

Συνέπειες του Θ.Μ.Τ

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

**Θέμα 17ο.** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με την  $f'$  συνεχή, ώστε να ισχύουν:

- $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 2$  και
  - $|f'(x)| > 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- (α') Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 1)$ , ώστε

$$f'(x_0) = 2.$$

(β') Να δείξετε ότι:

- $f'(x) > 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,
- η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - x, \quad x \in \mathbb{R},$$

είναι γνησίως αύξουσα.

(γ') Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = x + \frac{1}{2},$$

έχει ακριβώς μια πραγματική λύση.