

Το Θέμα της Εβδομάδας

Παράγωγος

Εφαπτομένη της C_f - Θ.Μ.Τ

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Θέμα 16ο. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$,
- $f'(x) = \frac{1}{1 + \eta\mu^2 x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $|f'(x)| \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- ii. $f(0) = 0$,
(υπόδειξη: εφαρμόστε το Θ.Μ.Τ για την f σε δύο κατάλληλα διαστήματα)
- iii. $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x}.$$

(γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$, έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Λύση.

- (α) i. Είναι $f'(x) > 0$, αφού $1 + \eta\mu^2 x \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Έχουμε:

$$f'(x) \leq 1 \Leftrightarrow 1 + \eta\mu^2 x \geq 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \geq 0,$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (και η ισότητα ισχύει για $x = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$).

- ii. Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[-1, 0]$, αφού είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$.

Επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-1, 0)$, τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = f(0) + 1.$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0, 1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (0, 1)$, τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 - f(0).$$

Επειδή $f'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$, θα ισχύει

$$f'(\xi_1) \leq 1 \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) \leq 1.$$

Οπότε,

$$f(0) + 1 \leq 1 \quad \text{και} \quad 1 - f(0) \leq 1,$$

δηλαδή,

$$f(0) \leq 0 \quad \text{και} \quad f(0) \geq 0.$$

Άρα, $f(0) = 0$.

iii. Για $\alpha = \beta$, ισχύει η ισότητα.

Για $\alpha \neq \beta$, για παράδειγμα $\alpha < \beta$, ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[\alpha, \beta]$. Άρα, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}. \quad \text{Οπότε,}$$

$$\left| \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \right| = |f'(\xi)| \leq 1,$$

δηλαδή

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|.$$

(β) Για $\alpha = x$ και $\beta = x + 1$, με $x \in (0, +\infty)$, από το (α')-iii, έχουμε:

$$\begin{aligned} |f(x+1) - f(x)| &\leq |x+1 - x| \Leftrightarrow |f(x+1) - f(x)| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq f(x+1) - f(x) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{f(x+1) - f(x)}{x} \leq \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$, σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x} = 0.$$

(γ) Έχουμε $g'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $x = 0$.

Δηλαδή, αν $x \neq 0$, τότε $g'(x) > 1$.

Επίσης, $f'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει για $x = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Αν οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη, τότε θα υπάρχουν $x, x_2 \in \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε $f'(x_1) = g'(x_2) = 1$.

Άρα, $x_2 = 0$.

Η εφαπτομένη της δ στο $x = 0$, είναι $y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$, η οποία εφάπτεται και στην C_f στο $x = 0$ αφού $f(0) = 0 = g(0)$ και $f'(0) = 1 = g'(0)$.

Οπότε, η ευθεία $y = x$ είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g .