Το Θέμα της Εβδομάδας

Συνέχεια-Πράγωγος

Συνέπειες του Θ.Μ.Τ

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 17ο. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με την f' συνεχή, ώστε να ισχύουν:

- $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ και
- $|f'(x)| > 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α') Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$, ώστε

$$f'(x_0) = 2.$$

(β') Να δείξετε ότι:

i. $f'(x) > 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

ii. η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - x, \ \ x \in \mathbb{R},$$

είναι γνησίως αύξουσα.

(γ') Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = x + \frac{1}{2},$$

έχει ακριβώς μια πραγματική λύση.

Λύση.

(α') Η συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,
- παραγωγίσιμη στο $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$,

άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$, ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2.$$

(β') i. Επειδή, $|f'(x)| > 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, η f' είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$. Οπότε, η f' διατηρεί πρόσημο $\mathbb{R}$.
Όμως, από το ερώτημα (α'), είναι $f'(x_0) = 2 > 0$, άρα, $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Άρα, η σχέση της υπόθεσης $|f'(x)| > 1$, $x \in \mathbb{R}$ γράφεται $f'(x) > 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων) και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f'(x) - 1 > 0$. Άρα, η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(γ') Έστω $h(x) = f(x) - x - \dfrac{1}{2},\ x \in \mathbb{R}$.

Για την συνάρτηση h, έχουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων,
- $h(0) \cdot h(1) < 0$, αφού $h(0) = f(0) - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ και $h(1) = f(1) - 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση $x_0 \in (0, 1)$.

Επίσης, επειδή η συνάρτηση h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = f'(x) - 1 > 0$ (από το ερώτημα (β') i), η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Οπότε και η λύση x_0 της εξίσωσης $h(x) = 0$, άρα και της εξίσωσης $f(x) = x + \dfrac{1}{2}$ είναι μοναδική.