

Το Θέμα της Εβδομάδας

Συνέχεια-Παράγωγος

Συνέπειες του Θ.Μ.Τ

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 18ο. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) - 5 = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(2) = 3$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x^2 - \sin x$.

Να αποδείξετε ότι:

- i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- ii. Η εξίσωση $f^2(x) = 5 + \sin x$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.