

# Ο Κύκλος

## 9ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπίης

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- (α) Όταν έχει κέντρο το σημείο  $O(0, 0)$  και διέρχεται από το σημείο  $A(-1, 3)$ .
- (β) Όταν έχει κέντρο το σημείο  $O(0, 0)$  και εφάπτεται της ευθείας  $\epsilon : x + y - 2 = 0$ .
- (γ) Όταν έχει κέντρο το σημείο  $K(-1, -1)$  και διέρχεται από το σημείο  $A(4, -3)$ .
- (δ) Όταν έχει κέντρο το σημείο  $K(-3, 1)$  και εφάπτεται της ευθείας  $\epsilon : 4x - 3y + 5 = 0$ .
- (ε) Όταν έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ , με  $A(1, 3)$  και  $B(-3, 5)$ .
- (ς) Όταν έχει κέντρο το σημείο  $K(-2, 3)$  και εφάπτεται στον άξονα  $x'$ .
- (ζ) Όταν διέρχεται από τα σημεία  $A(-1, 2)$  και  $B(2, 3)$  και το κέντρο του είναι στον άξονα  $y'y$ .
- (η) Όταν διέρχεται από τα σημεία  $A(1, 1)$ ,  $B(1, -1)$  και  $\Gamma(2, 0)$ .

2. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο  $C$  του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- (β) Να αποδείξετε ότι το σημείο  $A(3, 0)$  είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου  $C$ .
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το  $A(3, 0)$  και ορίζει χορδή του κύκλου  $C$ , στην οποία το  $A$  είναι το μέσο της .

3. Δίνεται ο κύκλος  $C : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$  και η ευθεία  $\epsilon : 3x - 4y = 8$ .

- (α) Να βρείτε το κέντρο  $K$  του κύκλου  $C$  και την ακτίνα του.
- (β) Αν  $K(1, 2)$ , να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου  $C$  από την ευθεία  $\epsilon$  είναι  $d(K, \epsilon) = \frac{13}{5}$ .
- (γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

4. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο  $C$  του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- (β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\epsilon : y = x - 3$  εφάπτεται του κύκλου  $C$  και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής τους.

Σημείωση

Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho > 0$ , είναι:  
 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ .

Σημείωση

Η ευθεία  $\epsilon$  εφάπτεται του κύκλου  $(K, \rho)$  αν και μόνο αν  $d(K, \epsilon) = \rho$ .

Σημείωση

Όταν ένας κύκλος διέρχεται από δύο σημεία τότε το κέντρο του βρίσκεται στην μεσοκάθετο της χορδής που ορίζουν αυτά τα σημεία.

5. Δίνονται οι κύκλοι :

$$C_1 : x^2 + y^2 = 9 \quad \text{και} \quad C_2 : (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι  $C_1$  και  $C_2$  εφάπτονται εξωτερικά.
- (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

6. Δίνεται ο κύκλος

$$C : x^2 + y^2 = 25 \quad \text{και το σημείο} \quad P(7, 1).$$

- (α) Να αποδείξετε ότι το σημείο  $P$  είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου  $C$ .
- (β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες, από το σημείο  $P$  προς τον κύκλο  $C$ , είναι μεταξύ τους κάθετες.

7. Δίνεται ο κύκλος  $C$  με κέντρο  $K(2, 0)$  και ακτίνα  $\rho = \sqrt{10}$ .  
Αν το  $A(3, \mu)$ , με  $\mu > 0$ , είναι σημείο του κύκλου  $C$ , να βρείτε :

- (α) την εξίσωση του κύκλου  $C$  και τον αριθμό  $\mu$ ,
- (β) την εξίσωση της εφαπτομένης  $\epsilon$  του  $C$  στο σημείο του  $A$ ,
- (γ) τις συντεταγμένες του αντιδιαμετρικού σημείου  $A'$  του  $A$ .

8. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου

$$C : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0,$$

οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία  $\eta : x - 2y + 2021 = 0$ .

9. Δίνεται ο κύκλος

$$C : (x - 1)^2 + y^2 = 4.$$

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου  $C$  οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $\Sigma(3, 3)$ .

10. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + 4y + 2\alpha = 0, \quad \text{όπου} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- (β) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$  έτσι, ώστε η ακτίνα του κύκλου αυτού να είναι ίση με 2.
- (γ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$  έτσι, ώστε το κέντρο του κύκλου να βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση  $\epsilon : 5x + 3y + 1 = 0$ .
- (δ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$  έτσι, ώστε ο κύκλος να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

*“Καμία ανθρωπίνη δραστηριότητα δεν μπορεί να ονομασθεί επιστήμη αν δεν μπορεί να στηριχτεί στα Μαθηματικά”.*

Da Vinci, Leonardo, 1452 – 1519, Ιταλός ζωγράφος.

Σημείωση

Για τις σχετικές θέσεις 2 κύκλων στην ενότητα 3.16. εδώ :



Σημείωση

Η εφαπτομένη του κύκλου  $C : x^2 + y^2 = \rho^2$ , στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $x_1 x + y_1 y = \rho^2$ .