

Κυρτότητα

16ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$.

(α') Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

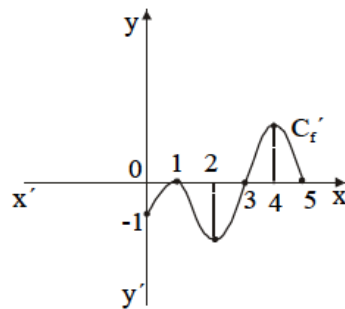
(β') Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Θέμα 2ο, Πανελληλαδικές Εξετάσεις 2004)

2. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε:

(α) τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων της,



(β) τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, κοίλη και τις θέσεις των σημείων καμψής της γραφικής της παράστασης.

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x < 0 \\ x^3 + 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής την παραπάνω συνάρτηση f.

4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα τις συναρτήσεις:

(a') $\phi(x) = xe^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$

(Y) $g(x) = x - \ln(3x)$, $x > 0$

$$(\beta) \quad f(x) = -e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(δ) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει τρία σημεία καμπής και τα δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

Έστω μια
συνάρτηση f
συνεχής στο
διάστημα Δ και
παραγωγίσιμη
στο εσωτερικό
του. Ισχύει ότι:
Αν $f''(x) < 0$
για κάθε x στο
εσωτερικό του
 Δ τότε η f είναι
κοίλη στο Δ .

Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του X_0 . Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της C_f αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως και η C_f έχει εφαιπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

H συνάρτηση f είναι κυρτή ή στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

H συνάρτηση f είναι κοίλη ή στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Σημείωση

Η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο καμψής της διαπερνά την C_f .

Σημείωση

Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε $f''(x_0) = 0$.

6. Αν το σημείο $A(-1, 4)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β .

7. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 5 \quad \text{και} \quad f''(x) < 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (α') Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.
 (β') Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 5x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 (γ') Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x) - 5x + 3}$

8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad x \in (-1, 1).$$

- (α') Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f .
 (β') Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - 2x}.$$

9. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

- (α') το x_0 είναι μοναδικό,
 (β') το $f(x_0)$ είναι ολικό ελάχιστο της f .

10. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x \ln x, \quad x > 0.$$

- (α') Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.
 (β') Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.
 (γ') Να αποδείξετε ότι

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}, \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

- (δ') Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει η σχέση $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3.$$

11. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ δεν μπορεί να είναι σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης.

“Τα Μαθηματικά είναι χωρίς καμιά αμφιβολία η μόνη οικουμενική γλώσσα”.

Connes, Alain, 1947–, Γάλλος μαθηματικός.

Σημείωση

Αν η f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) σε ένα διάστημα Δ , τότε η C_f είναι πάνω (αντίστοιχα κάτω) από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in \Delta$, εξαιρουμένου του σημείου επαφής.