

Το Θέμα της Εβδομάδας

Συνέχεια-Παράγωγος

Συνέπειες του Θ.Μ.Τ

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Θέμα 18ο. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) - 5 = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(2) = 3$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x^2 - \sin x$.

Να αποδείξετε ότι:

- i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- ii. Η εξίσωση $f^2(x) = 5 + \sin x$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

Λύση.

(α) i. Ισχύει ότι $f^2(x) = x^2 + 5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -5, \text{ αδύνατο.}$$

Οπότε, $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε, η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $f(2) = 3 > 0$, τότε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ισχύει ότι:

$$f^2(x) = x^2 + 5 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{x^2 + 5}.$$

Άρα, αφού η f παίρνει μόνο θετικές τιμές για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(β) i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$g'(x) = 2x + \eta\mu x \text{ και } g''(x) = 2 + \sigma\upsilon\nu x.$$

Παρατηρούμε ότι $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $1 \leq 2 + \sigma\upsilon\nu x \leq 3$. Οπότε, αφού η συνάρτηση g' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $g''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $x < 0$ ισχύει $g'(x) < g'(0) = 0$, αφού η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και για $x > 0$ ισχύει $g'(x) > g'(0) = 0$.

Οπότε, για την συνάρτηση g έχουμε:

η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ με $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και

η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ με $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ii. Η εξίσωση $f^2(x) = 5 + \sin x$ με $x \in \mathbb{R}$, γράφεται ισοδύναμα

$$x^2 + 5 = 5 + \sin x \Leftrightarrow x^2 - \sin x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες αντίθετες στο $(-\pi, \pi)$ και δεν έχει άλλες ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, με

$$g(\pi) = \pi^2 - \sin \pi = \pi^2 + 1 > 0$$

και

$$g(0) = -\sin 0 = -1 < 0.$$

Οπότε, από το θεώρημα του Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $\rho \in (0, \pi) \subset (0, +\infty)$. Όμως, η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε η ρίζα ρ είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

Επειδή, $g(-\rho) = (-\rho)^2 - \sin(-\rho) = \rho^2 - \sin \rho = g(\rho) = 0$, έχουμε ότι το $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$.

Αφού $0 < \rho < \pi$, τότε $-\pi < -\rho < 0$, δηλαδή η ρίζα $-\rho$ της εξίσωσης $g(x) = 0$ βρίσκεται στο διάστημα $(-\pi, 0)$.

Επίσης, η ρίζα $-\rho$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ στο διάστημα $(-\infty, 0]$, αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Άρα, η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sin x = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 5 + \sin x$, με $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς δύο ρίζες αντίθετες μεταξύ τους οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.