

Ασύμπτωτες-Κανόνες De L' Hospital

Μελέτη και Χάραξη C_f

17ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2}.$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 (β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f .
 (γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f .

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5x + 2 + \frac{3^x}{3^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- (α) η ευθεία με εξίσωση $y = 5x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f , στο $-\infty$,
 (β) η ευθεία με εξίσωση $y = 5x + 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f , στο $+\infty$.

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x.$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 (β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

4. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha x^2 + \beta x + 2}{x - 1} - x + 3 \right) = 0.$$

5. Αν η ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, να υπολογίσετε τα όρια:

- (α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x}{x}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - 3xf(x)}{x}$
 (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$ (δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x + 1}{xf(x) - 2x^2 + 5}.$

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

- (α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$ (ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$
 (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$ (δ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x$ (ς) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right).$

Ορισμός

Η ευθεία $y = \lambda$ λέγεται: οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της C_f , όταν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda$, και οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ της C_f , όταν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lambda$.

Ορισμός

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται: πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της C_f , όταν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0$, πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ της γραφικής παράστασης της f , όταν $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0$.

Σημείωση

Σημαντικές παρατηρήσεις: Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες και οι ρητές συναρτήσεις με βαθμό του αριθμητή μεγαλύτερου κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

Ορισμός

Η ευθεία με εξίσωση $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Σημείωση

Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες τις αναζητούμε: στα άκρα του πεδίου ορισμού της f στα οποία δεν ορίζεται η f και στα σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Σημείωση

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta \in \mathbb{R}$. (αντίστοιχα στο $-\infty$.)

Σημείωση

Κανόνες De L'Hospital σελίδες 164 και 165.

7. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

(Θέμα Β, Πανελλήνιες Εξετάσεις 2016)

Υπόδειξη: Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Βήμα 1ο: Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Βήμα 2ο: Εξετάζουμε την συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.

Βήμα 3ο: Εξετάζουμε αν η f είναι άρτια ή περιττή ή περιοδική.

Βήμα 4ο: Μελετούμε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Βήμα 5ο: Μελετούμε την f ως προς τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.

Βήμα 6ο: Βρίσκουμε τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της.

Βήμα 7ο: Βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Βήμα 8ο: Βρίσκουμε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

Βήμα 9ο: Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών της f .

Βήμα 10ο: Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τη βοήθεια του πίνακα μεταβολών της.

8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x - \frac{4}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

- (α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
- (β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- (γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- (δ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Θέμα Β, Πανελλήνιες Εξετάσεις 2018)

9. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln x, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x}{1-x}, \quad x \neq 1.$$

- (α) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$.
- (β) Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln \left(\frac{x}{1-x} \right)$, $x \in (0, 1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.
- (γ) Αν $\phi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση ϕ ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- (δ) Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ϕ και να τη σχεδιάσετε.

(Θέμα Β, Πανελλήνιες Εξετάσεις 2017)

“Τα Μαθηματικά είναι η πιο όμορφη και η πιο δυνατή δημιουργία του ανθρώπινου πνεύματος”.

Banach, Stefan, 1892 – 1945, Πολωνός μαθηματικός.