

Άλγεβρα Α' Λυκείου
Επαναληπτικές Ασκήσεις
13ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Αγαπητά μου παιδιά, οι παρακάτω ασκήσεις έχουν ως στόχο να αποτελέσουν μια αφορμή για επανάληψη των εννοιών 2.1 έως και 5.3 που έχετε διαδαχθεί μέχρι σήμερα.

Κάποιες από τις παρακάτω ασκήσεις είναι θέματα-ερωτήματα από την "Τράπεζα Θεμάτων" του ΙΕΠ. Να προσπαθήσετε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις, αφού πρώτα μελετήσετε τις σημειώσεις των τετραδίων σας. Καλή δύναμη!

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

- (α) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.
- (β) $|x| \geq x$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .
- (γ) Αν $\alpha < 0$, τότε $|\alpha| < 0$.
- (δ) Αν α, β δύο αριθμοί πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε η απόσταση τους είναι $d(\alpha, \beta) = |\beta - \alpha|$.
- (ε) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β .
- (ς) $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$, για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β .
- (ζ) Για οποιουδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α και β , ισχύει ότι $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.
- (η) $\sqrt{x^2} = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (θ) Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ τότε η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη.
- (ι) Η εξίσωση $\alpha x = \beta$ με $\alpha \neq 0$ και $\beta = 0$ είναι αδύνατη.
- (ια) Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με $\alpha > 0$ και ν άρτιο φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.
- (ιβ) Αν $\alpha = 0$ και $\beta < 0$, τότε η ανίσωση $\alpha x > \beta$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (ιγ) Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 , τότε $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.
- (ιδ) Υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 1 και γινόμενο -1 .
- (ιε) Η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$, με $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x .
- (ις) Αν οι αριθμοί α, β, γ , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.
- (ιζ) Ο 6ος όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 \neq 0$ και λόγο $\lambda \neq 0, 1$ δίνεται από τον τύπο $\alpha_6 = \alpha_1 \cdot \lambda^6$.

Ασκήσεις

1. (α) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $|x - 1| = 2$

ii. $|x + 1| = -3$

iii. $|x - 1| = |x + 1|$

- (β) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $|x - 1| < 2$

ii. $|x + 1| > -3$

iii. $|x + 1| > 3$

2. (α) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x^2 - 3x = -2$

ii. $x^2 + 9 = 6x$

iii. $x^2 - x = -1$

- (β) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $x^2 - 3x \leq -2$

ii. $x^2 + 9 \geq 6x$

iii. $x^2 - x < -1$

3. (α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 + 12 < 7x.$$

- (β) Για τις τιμές του
- x
- που επαληθεύουν την παραπάνω ανίσωση, να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση:

$$|x - 3| - |x - 4| - 2|x|.$$

4. (α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{|6x - 3|}{3} + 2 = 2|2x - 1|.$$

- (β) Αν
- α
- είναι η θετική λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (α), να λύσετε την ανίσωση:

$$|1 - x| < \alpha.$$

5. Δίνονται οι ανισώσεις:

$$\frac{x - 2}{3} + x \geq 2 \quad \text{και} \quad 9 - x^2 > 0.$$

- (α) Να λύσετε τις παραπάνω ανισώσεις.

- (β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

6. (α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$1 - 2x \geq 0.$$

- (β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$|x + 1| = 1 - 2x.$$

7. (α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^5 - 81x = 0.$$

- (β) Αν
- α
- είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης
- $x^5 - 81x = 0$
- , να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[6]{\alpha} = 3.$$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\omega^2 - \omega - 2 = 0$

(γ) $y^4 - y^2 - 2 = 0$

(β) $x^2 - |x| - 2 = 0$

(δ) $\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - \left(t + \frac{1}{t}\right) - 2 = 0$

9. Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = \frac{2}{5 + \sqrt{21}} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{2}{5 - \sqrt{21}}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(γ) Να βρείτε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α και β .

10. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (\lambda - 1)x + 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = \lambda^2 - 2\lambda - 3$.

(β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχεις δύο ρίζες άνισες.

(γ) Αν η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $x = -1$, να βρείτε την τιμή του λ .

11. Δίνονται οι ανισώσεις: $|x + 1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

(α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

(β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.

(γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων, να αποδείξετε ότι $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

12. Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

(α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13. Οι αριθμοί: $x^2 + 5, x^2 + x, 2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(α) Να υπολογίσετε τις δυνατές τιμές του αριθμού x .

(β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4^{ος} όρος της αριθμητικής προόδου, να βρείτε:

- i. τη διαφορά ω της προόδου,
- ii. τον πρώτο όρο της προόδου,
- iii. το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \dots + \alpha_{24}$.

14. (α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x , οι αριθμοί $x + 4, 2 - x, 6 - x$, με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(β) Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο 4^{ος} όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:

- i. τον λόγο λ της γεωμετρικής προόδου,
- ii. τον πρώτο όρο α_1 της γεωμετρικής προόδου.

Καλό Πάσχα!

Εύχομαι το Άγιο Φως της Ανάστασης να φωτίσει τις ζωές σας και να σας χαρίσει υγεία, χαρά και ευτυχία!