

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Ενότητες 1.1 έως 3.5

19ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

- (α) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.
- (β) Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.
- (γ) Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.
- (δ) Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία δεν είναι γνησίως μονότονη, δεν είναι και 1-1.
- (ε) Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
- (ς) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = 0$.
- (ζ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ή $+\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- (η) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.
- (θ) Για κάθε συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, ισχύει ότι :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

- (ι) Για κάθε συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 .
- (ια) Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .
- (ιβ) $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (ιγ) Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.
- (ιδ) Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , ισχύει ότι $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ .

- (ιε) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό της ελάχιστο.
- (ιϛ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
- (ιζ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , τότε τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .
- (ιη) Κάθε κρίσιμο σημείο μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f .
- (ιθ) Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f "διαπερνά" την καμπύλη.
- (κ) Μια πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού έχει οπωσδήποτε ένα σημείο καμπής.
- (κα) Μια κατακόρυφη ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f μπορεί να έχει δύο κοινά σημεία με την C_f .
- (κβ) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
- (κγ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$.
- (κδ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.
- (κε) Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$, ισχύει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- (κϛ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει:
Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Αν f και g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

- (α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές.
- (β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν μηδενίζεται σε αυτό, διατηρεί πρόσημο στο πεδίο ορισμού της.

- (α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές.
- (β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α').

Θέματα

1. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τα A και $f(A)$.

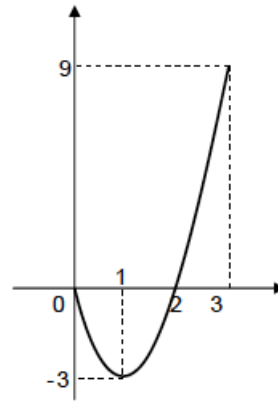
(β) Να λύσετε την εξίσωση

$$f^2(x) + 3f(x) = 0.$$

(γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

(δ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)} & \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \\ \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x) + 3} & \end{array}$$



2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{\ln x}$, $x > 0$ και $x \neq 1$.

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2021$.

(δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 2) = f(x^2 + 2x + 4)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$.

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

(δ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x = -1$ τοπικό ακρότατο και η εφαπτομένη της στο σημείο $A(2, f(2))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\eta : y = 9x + 2021$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.

(β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

(γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 = 3x - 1$ έχει δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

(δ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $B(0, 3)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-x}{x} - \ln x$, $x > 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και κυρτή.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) - 2f(x) + 2xf(x) = 0$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία θετική ρίζα x_0 .

(β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) - \frac{2}{1+f^2(x)} > 0$.

(γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{f(2x) - f(x)}$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \ln(1-x)$, $x \in (0, 1)$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της, f^{-1} .

(β) Αν $g(x) = f^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση g .

(γ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της g ως προς x .

8. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x) \geq x^2 - x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (α) i. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
 ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.
 iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \frac{3}{4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Αν επιπλέον $f(1) = 1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, να αποδείξετε ότι:

- i. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,
 ii. η f δεν είναι κοίλη.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta \mu x}{x} = 0$.
- $f'(x)f''(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (α) i. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.
 ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

(β) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(γ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

(δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} .

(Θέμα Γ, Επαναληπτικές Πανελλητικές Εξετάσεις 2022)

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$, όπου τα β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = 0$ το $f(0) = 3$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\beta = 0$ και $\gamma = 3$.

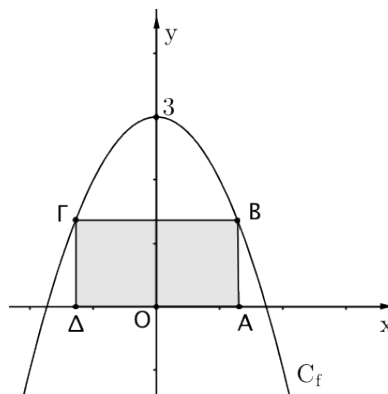
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, όπου $B(x, f(x))$, με $x \in (0, \sqrt{3})$.

- (β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, συναρτήσει του x , είναι

$$E(x) = -2x^3 + 6x, \quad x \in (0, \sqrt{3}).$$

- (γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ γίνεται μέγιστο όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

- (δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (0, \sqrt{3})$ για το οποίο το εμβαδόν $E(x_0)$ του αντίστοιχου ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ ισούται με $4e^{x_0} + 1$.



11. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = (x + \alpha)^2 - 1, \quad x \in [-1, +\infty), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$g(x) = x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν η κλίση της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι ίση με 2, τότε να αποδείξετε ότι:

(α) $\alpha = 1$,

- (β) η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της, f^{-1} .

Αν $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1$, $x \in [-1, +\infty)$, τότε να βρείτε:

- (γ) τη συνάρτηση $f^{-1} \circ g$,

- (δ) το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x) + 1}{(f^{-1} \circ g)(x)}$, όπου $(f^{-1} \circ g)(x) = |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(Θέμα Β, Επαναληπτικές Πανελλητικές Εξετάσεις 2020)

12. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + \alpha x, & \text{για } x \geq 0 \\ x^2 - \alpha, & \text{για } x < 0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$

- (α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

- (β) Να εξετάσετε αν το σημείο $x_0 = 0$ είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f .

- (γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

- (δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(Θέμα Γ, Τέκνων Ελλήνων Εξωτερικού, Πανελλητικές Εξετάσεις 2020)

13. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 1$ και ισχύει:

$$f(x) \geq x + 1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$.

- (β) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} ((f(x) - 1) \ln x).$

14. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$xf(x) + 3\eta\mu x = x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- (α) $f(0) = -3$,
 (β) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$,
 (γ) υπάρχει τουλάχιστον ένας θετικός πραγματικός αριθμός x_0 τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = e^{-x_0}.$$

15. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & \text{για } x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & \text{για } x < 1 \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

- (α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.
 (β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 (γ) i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική.
 ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.
 (δ) Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 1$. Την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο.

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου MOK τη χρονική στιγμή t_0 , όπου $K(x, 0)$ και $O(0, 0)$.

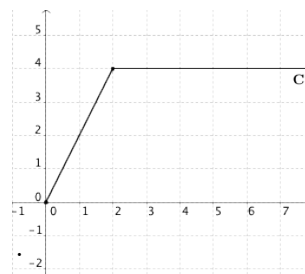
(Θέμα Γ, Πανελλήνιες Εξετάσεις 2019)

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 1$.

- (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
 (β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .
 (γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2) .

(Θέμα Δ, Πανελλήνιες Εξετάσεις 2018)

17. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο διάστημα $[0, +\infty)$ με $F(0) = 1$, να αποδείξετε ότι:



(α) $F(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x \in [0, 2] \\ 4x - 3, & \text{αν } x \in (2, +\infty) \end{cases}$

(β) $\int_0^4 f(x) dx = 12.$

Καλό Πάσχα!

Εύχομαι το Άγιο Φως της Ανάστασης να φωτίσει τις ζωές σας και να σας χαρίσει υγεία, χαρά και ευτυχία!