

Η Παραβολή-Η Έλλειψη Η Υπερβολή

11ο Φύλλο Εργασίας

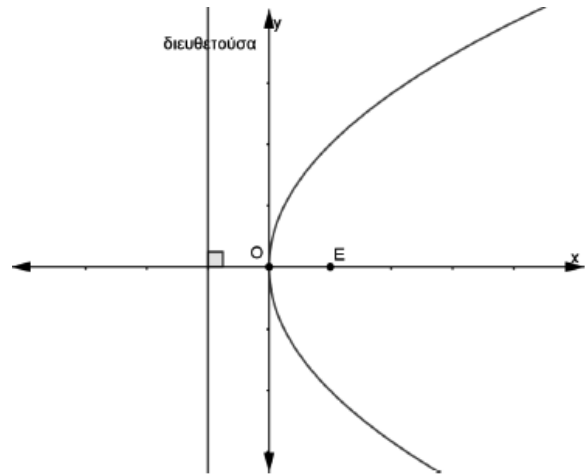
Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον $x'x$. Η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι $E(2, 0)$, η διευθετούσα της είναι η $\delta : x = -2$ και η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$.

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(2, 4)$ είναι η $\epsilon : y = x + 2$.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ϵ στο σημείο της $A(2, 4)$.



2. Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 4x$.

(α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της E και την εξίσωση της διευθετούσας δ .

(β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0, 2)$ και εφάπτονται στην παραβολή C .

3. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -2)$, $B(0, -4)$ και την παραβολή $y^2 = 4x$.

(α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(β) Να βρείτε το σημείο M της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην AB .

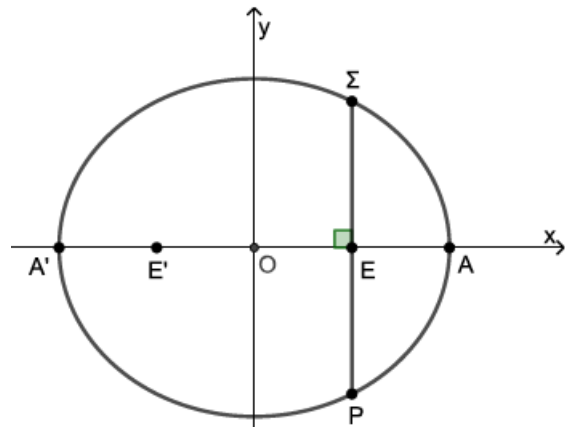
(γ) Αν $M(1, -2)$ και K είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABMK$ είναι παραλληλόγραμμο.

4. Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει εστίες τα σημεία $E'(-2, 0)$ και $E(2, 0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $(A'A) = 8$.

(α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

(β) Έστω Σ και P τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία $E(2, 0)$. Επίσης, το σημείο Σ έχει θετική τεταγμένη και το σημείο P αρνητική τεταγμένη.

- Να αποδείξετε ότι $\Sigma(2, 3)$ και $P(2, -3)$.
- Να υπολογιστεί το μήκος του τμήματος SP .



5. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$.

(α) Να προσδιορίσετε, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας, τα παρακάτω:

- τις συντεταγμένες των εστιών της,
- την εκκεντρότητα της,
- τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής.

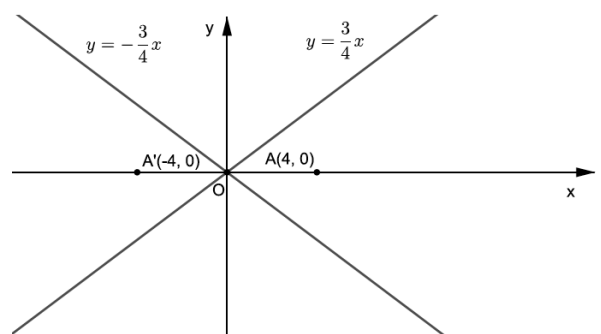
(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της, $A\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$

6. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-4, 0)$ και $A(4, 0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

- $\alpha = 4$ και $\beta = 3$,
- οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$.

(β) Να σχεδιάσετε το διπλανό σχήμα, συμπληρώνοντας το με την παραπάνω υπερβολή C .



“Μια κομψά διατυπωμένη απόδειξη, είναι ένα ποίημα απ’ όλες τις απόψεις.”

Kline, Morris , 1908 – 1992, Αμερικανός μαθηματικός.