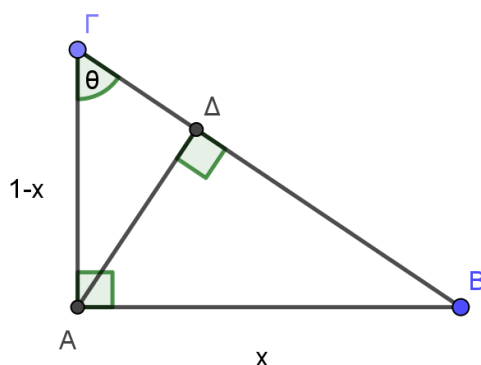


ΛΥΣΗ

α) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB = x$, $A\Gamma = 1 - x$. Τότε:

$$E(x) = (AB\Gamma) = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \frac{x(1-x)}{2} = \frac{x-x^2}{2}, 0 < x < 1.$$



Έχουμε: $E'(x) = \frac{1-2x}{2}$, οπότε η $E'(x) = 0$ έχει ρίζα την $x = \frac{1}{2}$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της E στο $(0,1)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$E'(x)$	+	0	-
$E(x)$			

Επομένως το μέγιστο εμβαδόν παρουσιάζεται όταν $x = \frac{1}{2}$ και είναι ίσο με

$$E\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}, \text{ ενώ δεν παρουσιάζει ελάχιστο.}$$

β) Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$(B\Gamma) = \sqrt{AB^2 + A\Gamma^2} = \sqrt{x^2 + (1-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$, $0 < x < 1$.

Έχουμε: $f'(x) = 4x - 2$, οπότε η $f'(x) = 0$ έχει ρίζα την $x = \frac{1}{2}$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f στο $(0,1)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Επομένως παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \frac{1}{2}$ και είναι ίσο με $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, ενώ δεν παρουσιάζει μέγιστο.

Άρα η ελάχιστη τιμή του $(B\Gamma)$ είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$, για $x = \frac{1}{2}$.

γ) Έστω $AD = v$ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου.

$$\text{Ισχύει } E = \frac{B\Gamma \cdot v}{2} \Rightarrow v = \frac{2E}{B\Gamma}.$$

Έχουμε: $0 < E \leq \frac{1}{8}$, με την ισότητα να ισχύει όταν $x = \frac{1}{2}$.

Επίσης $(B\Gamma) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 0 < \frac{2}{(B\Gamma)} \leq 2\sqrt{2}$, με την ισότητα να ισχύει όταν $x = \frac{1}{2}$.

Επομένως $\frac{2E}{B\Gamma} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$, δηλαδή $v \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$ με την ισότητα να ισχύει όταν $x = \frac{1}{2}$.

δ) Επειδή $\varepsilon\varphi\theta = \frac{AB}{AG} = \frac{x}{1-x}$, $0 < x < 1$ και το μήκος x είναι συνάρτηση του χρόνου t ,

$$\text{έχουμε: } \varepsilon\varphi\theta(t) = \frac{x(t)}{1-x(t)},$$

$$\text{οπότε } (\varepsilon\varphi\theta(t))' = \frac{x'(t)(1-x(t)) - x(t)(-x'(t))}{(1-x(t))^2} \Rightarrow \frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} = \frac{x'(t)}{(1-x(t))^2} \quad (1).$$

$$\text{Για } t = t_0, \varepsilon\varphi\theta(t_0) = \frac{x(t_0)}{1-x(t_0)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \theta(t_0) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0) = \frac{1}{2}.$$

Εναλλακτικά: Για $t = t_0$, $x(t_0) = \frac{1}{2}$ και $1 - x(t_0) = \frac{1}{2}$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

και ισοσκελές. Επομένως $\theta(t_0) = \frac{\pi}{4}$ και $\sin^2 \theta(t_0) = \frac{1}{2}$.

(1) $\Rightarrow \theta'(t_0) = 0,2 \text{ rad/sec}$.