

**Ολοκληρωτικός Λογισμός**

Διαγώνισμα Β' Τετραμήνου

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Ονοματεπώνυμο: .....

Βαθμός: .....

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c,$$

όπου  $c \in \mathbb{R}$  είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και

- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει την μορφή

$$G(x) = F(x) + c,$$

με  $c \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 20

**A2.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

Μονάδες 10

**A3.** Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή ( $\Sigma$ ) ή Λάθος ( $\Lambda$ ).

i. Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$ .

ii. Για κάθε συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$ , ισχύει ότι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

iii. Αν  $f', g'$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta}.$$

- iv. Για όλες τις συναρτήσεις  $f, g$  οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  και τις ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$  δίνεται από τον τύπο

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx.$$

- v. Έστω συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ . Το  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'x$  και κάτω από την  $C_f$  μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα  $x'x$  και πάνω  $C_f$ .

Μονάδες 25

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συνεχείς στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεις  $f$  και  $g$ .

Επίσης, ισχύει ότι:

$$\int_1^3 f(x) dx = 6, \quad \int_1^8 f(x) dx = 29, \quad \int_3^5 f(x) dx = 8 \text{ και } \int_1^5 g(x) dx = -6.$$

**B1.** Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i. } \int_3^8 f(x) dx, \quad \text{ii. } \int_5^8 2f(x) dx, \quad \text{iii. } \int_1^5 (f(x) + g(x)) dx.$$

Μονάδες 15

**B2.** Αν για την συνάρτηση  $g$  ισχύει ότι  $g(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [1, 5]$ , τότε να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της  $g$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = 5$ .

Μονάδες 15

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = xe^{-x}$  και η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \frac{x}{e}$ .

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

Μονάδες 15

*Σας εύχομαι επιτυχία!*