

# Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ Λυκείου Διαγώνισμα Προσομοίωσης

Γενικό Λύκειο Θήρας

14 Μαΐου 2023

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ .

Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε του θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  ισχύει ότι  $f(f^{-1}(x)) = x$ , για κάθε  $x \in A$ .
- ii. Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα, τότε η  $g \circ f$  ορίζεται, αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .
- iii. Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ , είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}^*$ .
- iv. Κάθε κρίσιμο σημείο μιας συνάρτησης  $f$  είναι και θέση τοπικού ακροτάτου της.

ν. Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ .

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e}{e^x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη της  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 6**

Αν  $h(x) = f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{e-x}{x}\right)$ ,  $x \in (0, e)$ , τότε:

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(0, e)$ .

**Μονάδες 5**

**B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $h$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 8**

**B4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h$  και να σχεδιάσετε τη γραφική παράστασή της.

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(x^2) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} .$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της αλλά μη παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, να βρείτε το σύνολο τιμών της καθώς και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 2023$ .

**Μονάδες 9**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \ln(x^2) - x^2}{2}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τον άξονα  $x'/x$ .

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f(4) = 2 + f(0)$ .
- $f(x)f'(x) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- $\int_0^3 f^2(x)dx = 36$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f^2(x) = x^2 + 9$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της  $C_f$ , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία  $(\epsilon) : 2y - x + 2023 = 0$ .

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\mathbb{R}$  τέτοια, ώστε  $F(4) = 0$ , να βρείτε το εμβαδό του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $F$ , τον άξονα  $x'/x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 4$ .

**Μονάδες 6**

*Σας εύχομαι επιτυχία!*