

Το Θέμα της Εβδομάδας

Η Έννοια της Πραγματικής Συνάρτησης

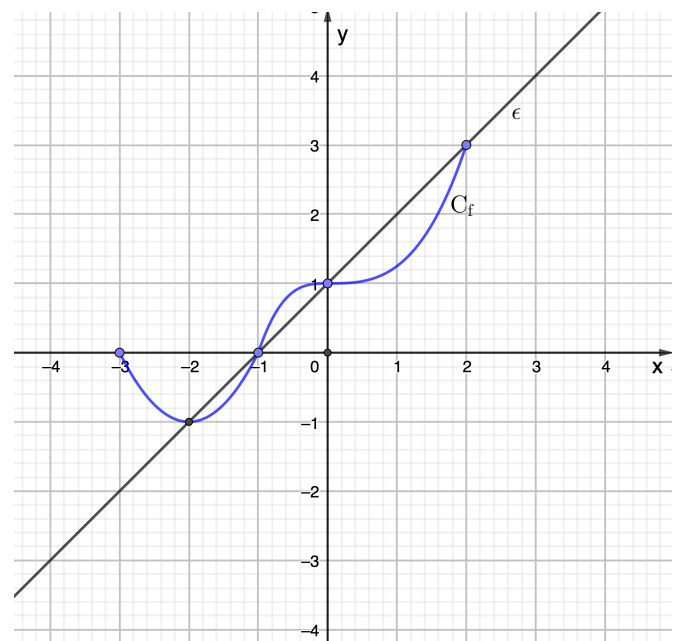
Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Θέμα 1ο. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η ευθεία (ϵ) .

- (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι $y = x + 1$.
- (β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- (γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- (δ) Να λύσετε τις εξισώσεις:
 - i. $f(x) = 0$
 - ii. $f(x) - x - 1 = 0$
 - iii. $f^2(x) - 2f(x) - 3 = 0$.
- (ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq x + 1$.
- (ς) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \ln(f(x)) + \sqrt{e^x - 1}.$$
- (ζ) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των λύσεων, ως προς x , της εξίσωσης $f(x) = \alpha$.



Λύση.

- (α) Έστω $\epsilon : y = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η εξίσωση της ευθείας (ϵ) .
Από το σχήμα παρατηρούμε ότι η ευθεία (ϵ) διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(0, 1)$.
Άρα, οι συντεταγμένες των σημείων επαληθεύουν την εξίσωση της.
Έχουμε:

$$0 = -\alpha + \beta \quad \text{και} \quad 1 = \alpha \cdot 0 + \beta.$$
 Άρα, $\alpha = \beta = 1$ και $\epsilon : y = x + 1$.
- (β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f .
Άρα, $A = [-3, 2]$.
- (γ) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f .
Άρα, $f(A) = [-1, 3]$.

- (δ) i. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύσεις τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$, οπότε έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \quad \text{ή} \quad x = -1.$$

- ii. $f(x) - x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x + 1$.

Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = x + 1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της ευθείας (ϵ) και της C_f , οπότε έχουμε:

$$f(x) = x + 1 \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ή} \quad x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

- iii.

$$\begin{aligned} f^2(x) - 2f(x) - 3 = 0 &\Leftrightarrow f^2(x) - 3f(x) + f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &f(x)(f(x) - 3) + f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &(f(x) - 3)(f(x) + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &f(x) = 3 \quad \text{ή} \quad f(x) = -1. \end{aligned}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 3$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την οριζόντια ευθεία $y = 3$, οπότε έχουμε:

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 2.$$

Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = -1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_f με την οριζόντια ευθεία $y = -1$, οπότε έχουμε:

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow x = -2.$$

Άρα,

$$f^2(x) - 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

- (ε)

$$f(x) \leq x + 1 \Leftrightarrow f(x) = x + 1 \quad \text{ή} \quad f(x) < x + 1.$$

Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < x + 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία ϵ , οπότε έχουμε:

$$f(x) < x + 1 \Leftrightarrow x \in (-2, -1) \cup (0, 2).$$

Άρα,

$$f(x) \leq x + 1 \Leftrightarrow x \in [-2, -1] \cup [0, 2].$$

- (ς) Η συνάρτηση g ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύουν:

$$x \in A \quad \text{και} \quad f(x) > 0 \quad \text{και} \quad e^x - 1 \geq 0.$$

Έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \text{και} \\ f(x) > 0 \\ \text{και} \\ e^x - 1 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [-3, 2] \\ \text{και} \\ x \in [-1, 2] \\ \text{και} \\ e^x \geq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in [-3, 2] \\ \text{και} \\ x \in [-1, 2] \\ \text{και} \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

Άρα, $x \in [0, 2]$.

Οπότε, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το σύνολο $D_g = [0, 2]$.

(ζ) Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ είναι το ίδιο με το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y = \alpha$. Έχουμε:

- Αν $\alpha < -1$ ή $\alpha > 3$ τότε η ευθεία $y = \alpha$ δεν τέμνει την C_f . Άρα, η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha = -1$, τότε η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει την C_f στο σημείο με συντεταγμένες $(-2, -1)$. Άρα, η εξίσωση $f(x) = \alpha \Leftrightarrow f(x) = -1$ έχει μοναδική λύση την $x = -2$.
- Αν $\alpha = 3$, τότε η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει την C_f στο σημείο με συντεταγμένες $(2, 3)$. Άρα, η εξίσωση $f(x) = \alpha \Leftrightarrow f(x) = 3$ έχει μοναδική λύση την $x = 2$.
- Αν $0 < \alpha < 3$, τότε η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει την C_f σε ένα σημείο, άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μοναδική λύση.
- Αν $-1 < \alpha \leq 0$, τότε η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει την C_f σε δύο σημεία, οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει δύο λύσεις.