

Άλγεβρα Α' Λυκείου

Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους

2ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Να βρείτε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων.

$$(α) A = 4 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot (7 - 8)$$

$$(γ) \Gamma = \left(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$(β) B = 7 - 3 \cdot (5 - 2 \cdot 3) - 3^2$$

$$(δ) \Delta = 4 - 3 \cdot (1 - 2)^2 - 1.$$

2. Δίνεται η παράσταση

$$A = 1 + 3(2\alpha - 3\beta) - 2(\alpha - \beta) - \beta.$$

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

(β) Αν $\alpha = \frac{1}{2}$ και $\beta = -\frac{2}{3}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Α.

3. Δίνεται ότι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και

$$A = \alpha - 3\beta + 4\gamma, B = \beta - \alpha - 2\gamma.$$

Αν οι αριθμοί Α και Β είναι αντίθετοι, να δείξετε ότι $\beta = \gamma$.

4. Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι και έχουν άθροισμα ίσο με 2, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \alpha(3 - \beta) + \beta(3 - \alpha).$$

5. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

(α) Αν ο α είναι αρνητικός αριθμός τότε ο $-\alpha$ είναι αριθμός.

(β) Αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι τότε ο $\alpha \cdot \beta$ είναι αριθμός.

(γ) Ο αριθμός $\frac{1}{5}$ είναι του 5 και του $-\frac{1}{5}$.

(δ) Ο αντίστροφος του αριθμού -1 είναι ο αριθμός

(ε) Ο αντίθετος του αριθμού $\alpha - \beta$ είναι ο αριθμός

(ς) Αν $\alpha = 3$ και $\beta = 5$, τότε $\alpha + \beta = \dots\dots\dots$

(ζ) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε: $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

(η) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε: $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

Επίμεριστη

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Σημείωση

Δύο αριθμοί α και β είναι αντίθετοι αν $\alpha + \beta = 0$.
Ο αντίθετος του α είναι ο $-\alpha$.

Σημείωση

Δύο αριθμοί α και β (διαφορετικοί του μηδενός) είναι αντίστροφοι αν έχουν γινόμενο 1.
Ο αντίστροφος του $\alpha \neq 0$ είναι ο $\frac{1}{\alpha}$.

6. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$(α) A = (-4)^2 \cdot 2^{-1} - 5 - (-3) \cdot 2^2 - (-2)^4$$

$$(β) B = (-1)^{2020} - (-1)^{2021} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} - 2^2.$$

7. Αν $\alpha, \beta \neq 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(α) \frac{\alpha^2 \cdot \alpha^5}{\alpha^4}$$

$$(γ) (\alpha^2 \cdot \beta^3)^{-2} \cdot (\alpha \cdot \beta)^4$$

$$(β) \frac{(\alpha^2)^3 \cdot \alpha}{\alpha^4}$$

$$(δ) (2\alpha)^3 : \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-2}.$$

8. Δίνεται η παράσταση $A = x - x(x^2 - x) - (x - 3)(2x + 1)$.

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

(β) Αν $x = -\frac{1}{2}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης A.

9. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$$(α) A = \frac{4\alpha}{3\beta}$$

$$(β) B = \frac{\alpha - \beta}{2\alpha}$$

$$(γ) \Gamma = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}.$$

10. Να αποδείξετε ότι:

$$(α) (-\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2,$$

$$(β) (\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma,$$

$$(γ) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta),$$

$$(δ) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4, \quad x \neq 0,$$

11. Αν $\alpha \in \mathbb{Z}$ και ο α^2 είναι περιττός, να αποδείξετε ότι ο α είναι περιττός.

12. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $A = x^2$.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Τράπεζα θεμάτων)

13. Να γραφούν ως γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:

$$(α) 2x^2 - 6x$$

$$(γ) 9x^2 - 4,$$

$$(ε) x^2 - 2x + 1.$$

$$(β) \alpha x + \beta y + \alpha y + \beta x,$$

$$(δ) x^3 - 8$$

$$(ς) x^3 + x^2 - x - 1$$

“Αν οι αριθμοί δεν είναι όμορφοι, δεν ξέρω τι είναι όμορφο.”

Paul Erdős, 1913-1996, Ούγγρος μαθηματικός