

Ισότητα Συναρτήσεων-Πράξεις με Συναρτήσεις

Σύνθεση Συναρτήσεων

2ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 \quad \text{και} \quad g(x) = \ln |x|.$$

Να αποδείξετε ότι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x(x-1)} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}.$$

δεν είναι ίσες.

Στη συνέχεια, να βρείτε το ευρύτερο υπόσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{2-x}.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

(α) $f + g$

(β) $f - g$

(γ) $f \cdot g$

(δ) $\frac{f}{g}$

4. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, αν:

(α) $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$

(β) $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$

(γ) $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = x^2 - 1$

(δ) $f(x) = \frac{x}{x-2}$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$

(ε) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ και $g(x) = \ln x$.

Σημείωση

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad \text{και} \quad D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}.$$

Γενικά, $g \circ f \neq f \circ g$.

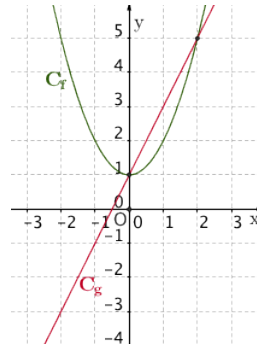
Ισχύει όμως: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

5. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε κάθε μια από τις παρακάτω ερωτήσεις.

(α) Δίνονται οι συναρτήσεις $\phi(x) = x$ και $t(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Αν $h = t \circ \phi$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι:

- A. $h(x) = x^2 + x$ B. $h(x) = x^3$ Γ. $h(x) = x^2$ Δ. $h(x) = x$

(β) Στη διπλανή εικόνα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g . Η τιμή της $f \circ g$ στο $x = 0$ είναι:



- A. 3 B. 1 Γ. 2 Δ. 5

6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}, \quad x \neq 2.$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ f$.

(β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$.

7. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x - 4\sqrt{x} + 4, \quad x \geq 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$(f \circ f)(x) = x, \quad \text{για κάθε } x \in [0, 4].$$

8. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 1]$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- (α) $g(x) = f(x+1)$ (β) $h(x) = f(x^2)$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \alpha x - 2 \quad \text{και} \quad g(x) = 2x - \alpha.$$

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες ισχύει ότι:

$$f \circ g = g \circ f.$$

10. Να βρείτε τη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει:

(α) $f(1-x) = x^2 - x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(β) $f(e^x) = x^2 - x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

11. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει:

(α) $(f \circ g)(x) = x^2 - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$,

(β) $(g \circ f)(x) = x - \ln x + 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, αν $g(x) = 2x - 5$, $x \in \mathbb{R}$.

“Να μαθαίνεις από το χθες, να ζεις το σήμερα, να ελπίζεις για το αύριο, αλλά το σημαντικότερο είναι να μην πάψεις ποτέ να διερωτάσαι”

Albert Einstein, 1879-1955, Γερμανός φυσικός.