# Το Θέμα της Εβδομάδας

Ισότητα Συναρτήσεων-Πράξεις Συναρτήσεων

Μονότονες Συναρτήσεις

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

**Θέμα 2ο.** Δίνονται οι συναρτήσεις

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 3 - \sqrt{\mathrm{x}}, \ \ \mathrm{x} \geq 0 \quad \text{και} \quad \mathrm{g}(\ln \mathrm{x} - 1) = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{e}} + 2, \ \ \mathrm{x} > 0.$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$.

(β΄) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $\mathrm{fog}$ και $\mathrm{gof}$ και να εξετάσετε αν είναι ίσες.

(γ΄) Να ορίσετε την συνάρτηση $\mathrm{g} - \mathrm{f}$ και την συνάρτηση $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{f}}$.

(δ΄) Αν $\mathrm{h} = \mathrm{g} - f$, να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\mathrm{h}$ με τον άξονα $\mathrm{x'x}$.

**Λύση.**

(α΄) Θέτουμε $\ln \mathrm{x} - 1 = \mathrm{y}$, με $\mathrm{x} > 0$, οπότε, $\ln \mathrm{x} = \mathrm{y} + 1$, άρα $\mathrm{x} = \mathrm{e}^{\mathrm{y}+1}$, με $\mathrm{y} \in \mathbb{R}$. Η σχέση $\mathrm{g}(\ln \mathrm{x} - 1) = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{e}} + 2$ γράφεται $\mathrm{g}(\mathrm{y}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{y}+1}}{\mathrm{e}} + 2 = \mathrm{e}^{\mathrm{y}} + 2$, $\mathrm{y} \in \mathbb{R}$. Επομένως, $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$.

(β΄) Έχουμε $\mathrm{D_f} = [0, +\infty)$, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathrm{f}$ και $\mathrm{D_g} = \mathbb{R}$, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathrm{g}$.

Το πεδίο ορισμού της $\mathrm{fog}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{D_{fog}} =& \{\mathrm{x} \in \mathrm{D_g} \mid \mathrm{g}(\mathrm{x}) \in \mathrm{D_f}\} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2 \in (0, +\infty)\} = \\ & \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2 > 0\} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R} \mid \mathrm{e}^{\mathrm{x}} > -2 >\} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $\mathrm{fog}$ έχει τύπο:

$$(\mathrm{fog})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{x})) = \mathrm{f}(\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2) = 3 - \sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + 2}, \ \ \mathrm{x} \in \mathbb{R}.$$

Το πεδίο ορισμού της $\mathrm{gof}$:

$$\mathrm{D_{gof}} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{D_f} \mid \mathrm{f}(\mathrm{x}) \in \mathrm{D_g}\} = \{\mathrm{x} \in [0, +\infty) \mid 3 - \sqrt{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty).$$

Η συνάρτηση $\mathrm{gof}$ έχει τύπο:

$$(\mathrm{gof})(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{f}(\mathrm{x})) = \mathrm{g}\left(3 - \sqrt{\mathrm{x}}\right) = \mathrm{e}^{3-\sqrt{\mathrm{x}}} + 2, \ \ \mathrm{x} \in [0, +\infty).$$

Οι συναρτήσεις $\mathrm{fog}$ και $\mathrm{gof}$ δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, άρα δεν είναι ίσες.

(γ') Το πεδίο ορισμού της $g - f$:

$$D_{g-f} = D_f \cap D_g = [0, +\infty).$$

Η συνάρτηση $g - f$ έχει τύπο:

$$(g - f)(x) = g(x) - f(x) = e^x + 2 - (3 - \sqrt{x}) = e^x + \sqrt{x} - 1, \;\; x \geq 0.$$

Το πεδίο ορισμού της $\frac{g}{f}$:

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g \setminus \{x \in D_f \cap D_g \;\mid\; f(x) = 0\} = (0, 9) \cup (9, +\infty),$$

διότι για $x \geq 0$,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9.$$

Η συνάρτηση $\frac{g}{f}$ έχει τύπο:

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{e^x + 2}{3 - \sqrt{x}}, \;\; x \in (0, 9) \cup (9, +\infty).$$

(δ') Έχουμε ότι

$$h(x) = e^x + \sqrt{x} - 1, \;\; x \geq 0.$$

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της $C_h$ με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$h(x) = 0, \text{ με } x \in [0, +\infty).$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

$$e^{x_1} < e^{x_2}, \text{ αφού } e^x \uparrow \mathbb{R} \tag{1}$$

και

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}, \text{ αφού } \sqrt{x} \uparrow [0, +\infty). \tag{2}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2). Έχουμε:

$$e^{x_1} + \sqrt{x_1} < e^{x_2} + \sqrt{x_2} \Rightarrow e^{x_1} + \sqrt{x_1} - 1 < e^{x_2} + \sqrt{x_2} - 1 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $h(0) = 0$, δηλαδή το $x = 0$ είναι λύση της εξίσωσης $h(x) = 0$. Επειδή η συνάρτηση $h$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, έχουμε ότι το $x = 0$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $h(x) = 0$.

Οπότε, το σημείο $O(0, 0)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της $C_h$ με τον άξονα $x'x$.