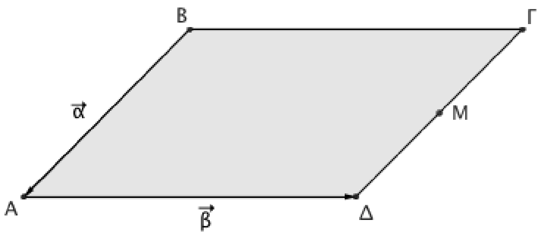
# Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα

## 2ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

1. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι: $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \vec{\beta}$ και το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ.
Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α του διπλανού πίνακα με το ίσο του της στήλης Β.




| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| Στήλη Α | Στήλη Β |
|---|---|
| 1. $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ | Α. $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ |
| 2. $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}$ | Β. $\vec{\beta} + \vec{\alpha}$ |
| 3. $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}}$ | Γ. $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ |
| 4. $\overrightarrow{\mathrm{\Delta M}}$ | Δ. $\vec{\beta} - \frac{1}{2}\vec{\alpha}$ |
| 5. $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ | Ε. $\frac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ |
| | Ζ. $-\frac{1}{2}\vec{\alpha}$ |
| | Η. $\frac{1}{2}\vec{\alpha}$ |

2. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχυεί ότι:
$$\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot \vec{\beta} \text{ και } \vec{\beta} = \left|\vec{\beta}\right| \cdot \vec{\alpha},$$
να αποδείξετε ότι:
(α') $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$,
(β') $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

3. Αν ισχύει ότι:
$$3\overrightarrow{\mathrm{\Lambda K}} + 7\overrightarrow{\mathrm{KA}} = 4\overrightarrow{\mathrm{KB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{\Lambda B}},$$
να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β ταυτίζονται.

**Σημείωση**
Τα σημεία Α και Β ταυτίζονται $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{0}$.

4. Αν ισχύει ότι:
$$2\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 5\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}} = \overrightarrow{\mathrm{\Delta B}} + 3\overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}},$$
να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ είναι αντίρροπα.

5. Αν για τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχυει ότι $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$.

**Σημείωση**
**Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων:** Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε: $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

6. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.

7. Αν ισχύει ότι:
$$2\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PB}} - 5\overrightarrow{\mathrm{P\Gamma}} = \overrightarrow{0},$$
να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

Σημείωση

Για να αποδείξουμε ότι τρία σημεία είναι **συνευθειακά** αρκεί να αποδείξουμε ότι δύο από τα διανύσματα που έχουν άκρα αυτά τα σημεία είναι μεταξύ τους παράλληλα.

8. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και τυχαίο σημείο Ο. Αν ισχύει ότι:
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma},$$
τότε:

   (α΄) να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$,

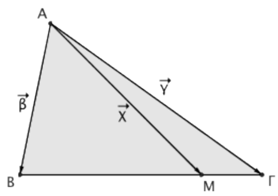
   (β΄) να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια ώστε:
$$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{\Gamma E}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{AZ}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}.$$

   (α΄) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{\Delta Z}}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

   (β΄) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

10. Στο διπλανό σχήμα είναι ΜΒ = 3ΜΓ. Να αποδείξετε ότι:
$$\vec{x} = \frac{1}{4}\left(\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}\right).$$




11. Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

   (α΄) $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} + \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MN}}$,

   (β΄) $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{B\Delta}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MN}}$,

   (γ΄) $\overrightarrow{\mathrm{NA}} + \overrightarrow{\mathrm{NB}} + \overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{M\Delta}} = \overrightarrow{0}$.

Σημείωση

**Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος:** Αν Μ μέσο του ΑΒ, τότε: $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

12. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το κέντρο του.

   (α΄) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{O\Delta}} = \overrightarrow{0}$.

   (β΄) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει: $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{M\Gamma}} + \overrightarrow{\mathrm{M\Delta}} = 4\overrightarrow{\mathrm{MO}}$.

*¨Ο καλύτερος τρόπος για να εκτιμήσει κανείς την αξία των μαθηματικών είναι να μελετήσει την ιστορία τους¨*

Carl B. Boyer, 1906-1976, Αμερικανός μαθηματικός.