

Ακρότατα Συνάρτησης-Συνάρτηση 1 – 1

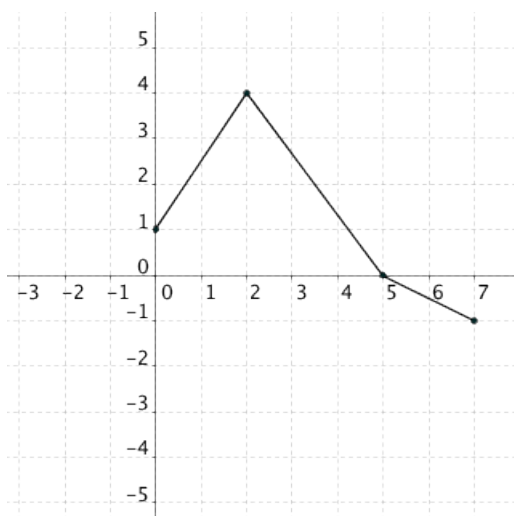
Αντίστροφη Συνάρτηση

4ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f καθώς επίσης και το σύνολο τιμών της.
- (β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
- (γ) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f .
- (δ) Να βρείτε την τιμή της $f \circ f$ στο $x = 5$.
- (ε) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ και να βρείτε τα ολικά ακρότατα της.
- (ζ) Να λύσετε τις εξισώσεις:
- $f(x) = -1$,
 - $f(x) = x^2 + 4$.



Ορισμός

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Ορισμός

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\eta x$, $x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (β) Είναι ο αριθμός 2 ολικό μέγιστο της συνάρτησης f ;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + 1}{3^x}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1 – 1.
- (β) Να λύσετε την εξίσωση $e^x + 1 - 2 \cdot 3^x = 0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x + x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1 – 1.
- (β) Να λύσετε την εξίσωση $3^x + x^3 = 4$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 – 1.
- (β) Να λύσετε την εξίσωση $x^{10} - 32x^5 = 6x - 3x^2$.

Σημείωση

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1-1** όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Σημείωση

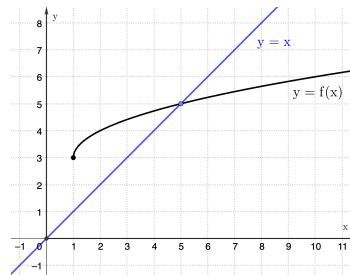
Χρήσιμο σε ασκήσεις:
Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

Σημείωση

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι και 1-1.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:
 $f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (α) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.
 (β) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $f(2x^3 + x) - f(4 - x) = 0$.
7. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε η $f \circ g$ να είναι $1 - 1$.
- (α) Να αποδείξετε ότι η g είναι $1 - 1$.
 (β) Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $g(f(\ln x) + 1) = g(x + 2)$, να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x + 1, x \in \mathbb{R}$.
8. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \sqrt{x - 1} + 3, x \geq 1$.
- (α) Να δείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.
 (β) Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντίστροφη της f .

(γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y = x$ της γωνίας $\widehat{xOy}$. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1} και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.



Σημείωση

Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, που διχοτομεί τις γωνίες $\widehat{xOy}$ και $\widehat{x'O'y'}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \ln x, & 0 < x < 1 \end{cases}$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1 - 1$.
 (β) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f .

10. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, -2)$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 (β) Να λύσετε την ανίσωση $f(3x - 1) + 2 < 0$.
 (γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1}) = 2$.
 (δ) Να βρείτε τις τιμές $f^{-1}(2)$ και $f^{-1}(-2)$.
 (ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(-2 + f^{-1}(x + 2)) = 2$.

11. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2)$.

(α) Να βρείτε τη μονοτονία της.
 (β) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει $f(\alpha \ln \alpha) \leq f(\ln \alpha)$.
 (γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1} + \ln x) = \ln 2$.
 (δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + (3 - \ln 2)x - 3, x \in \mathbb{R}$.
 Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται.

“Τα πράγματα αυτού του κόσμου δεν μπορούν να κατανοηθούν χωρίς τη γνώση των Μαθηματικών”

Bacon Roger, 1214 – 1292, Άγγλος φιλόσοφος.

Σημείωση

Μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο.

Σημείωση

$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$