

Άλγεβρα Α' Λυκείου

Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

3ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Σημείωση

Ο αριθμός α είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό β , δηλαδή $\alpha > \beta$, όταν $\alpha - \beta > 0$.

Σημείωση

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\alpha^2 \geq 0$. Το $=$ μόνο αν $\alpha = 0$.

Σημείωση

$\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma$
 $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
 $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

Σημείωση

α, β ομόσημοι
 $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0$
 $\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$.

Σημείωση

α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0$
 $0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$.

Σημείωση

$\alpha > 0$ και $\beta > 0 \Rightarrow \alpha + \beta > 0$
 $\alpha < 0$ και $\beta < 0 \Rightarrow \alpha + \beta < 0$.

1. Αν $\alpha < 2$ και $\beta > 3$, να βρείτε το πρόσημο των αριθμών:

(α) $\alpha - 2$

(β) $\beta - 3$

(γ) $(\alpha - 2)(\beta - 3)$

2. Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ και $\gamma < 0$, να βρείτε το πρόσημο των αριθμών:

(α) $-(\alpha + \beta)$

(β) $\alpha\gamma + \frac{\beta}{\gamma}$

(γ) $(\alpha + 2)(\gamma - 1)$

3. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , να αποδείξετε ότι:

(α) $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$

(γ) $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha - \beta)^2$

(β) $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$

(δ) $(\alpha + \beta)(\alpha + 4\beta) \geq 9\alpha\beta$

4. Αν $\alpha > \beta > 1$, να αποδείξετε ότι

$$\beta(\alpha + 1) > \alpha + \beta^2.$$

5. Να συμπληρώσετε τα κενά με $<$ ή $>$ ώστε οι παρακάτω ισχυρισμοί να είναι αληθείς.

(α) $\alpha < 3 \Rightarrow \alpha \dots\dots 5$

(γ) $\alpha < \beta \Leftrightarrow -\alpha \dots\dots -\beta$

(β) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - 2 \dots\dots \beta - 2$

(ζ) $\alpha > 3$ και $\beta > 2 \Rightarrow \alpha\beta \dots\dots 6$

(γ) $\alpha < 2$ και $\beta < 4 \Rightarrow \alpha + \beta \dots\dots 6$

(η) $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \alpha^2 \dots\dots \beta^2$

(δ) $\alpha < \beta \Leftrightarrow -2\alpha \dots\dots -2\beta$

(θ) $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \dots\dots \frac{1}{\beta}$

(ε) $\alpha > \beta \Leftrightarrow 3\alpha \dots\dots 3\beta$

6. Αν α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

(α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$,

(β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

(Τράπεζα θεμάτων)

7. Να αποδείξετε ότι αν α και β θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} \geq \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

8. Αν $1 < x < 2$ και $3 < y < 5$, να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

Σημείωση

$\alpha > \beta$ και $\gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$
 $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
 $\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0 \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\delta$
 $0 < \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu < \beta^\nu$

(α) $x + 2y$

(γ) $y - x$

(ε) $\frac{x+2}{y-1}$

(β) $3x - 2y$

(δ) $\frac{x}{y}$

(ς) $x^2 + y^2$

9. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$.

(β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(γ) Να βρείτε την σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

Σημείωση

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0.$$

Σημείωση

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0.$$

(Τράπεζα θεμάτων)

10. (α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

(β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$.

(Τράπεζα θεμάτων)

11. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

(β) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda \geq 0$, για κάθε τιμή των α και β .

(γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Τράπεζα θεμάτων)

12. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

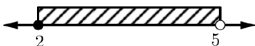
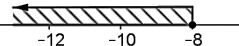
(α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 < \alpha$,

(β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$0, \alpha, \alpha^3, 1, \frac{1}{\alpha}.$$

(Τράπεζα θεμάτων)

13. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Γραφική απεικόνιση	Ανισότητα που ικανοποιεί ο πραγματικός αριθμός x	Διάστημα στο οποίο ανήκει ο πραγματικός αριθμός x
		$x \in [2, 5)$
	$-1 \leq x \leq 4$	
		

“Όπως και σε οτιδήποτε άλλο, έτσι και στα μαθηματικά, η ομορφιά της μαθηματικής θεωρίας μπορεί να διαισθανθεί, αλλά όχι να εξηγηθεί.”

Arthur Cayley, 1821-1895, Άγγλος μαθηματικός.