Το Θέμα της Εβδομάδας

Γραφική παράσταση Συνάρτησης

Μονότονες Συναρτήσεις-Αντίστροφη Συνάρτηση

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 4ο. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(fog)(x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α') Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = -1$.

(β') Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι $1-1$ και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

(γ') Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1}of$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\phi(x) = \sqrt{(g^{-1}of)(x)}$.

(δ') Να λύσετε την εξίσωση $\phi(x) - \text{συν}x + 1 = 0$.

Λύση.

(α') Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned}(fog)(x) = x^2 - 2x &\Leftrightarrow f(g(x)) = x^2 - 2x \\ &\Leftrightarrow f(x+\beta) = x^2 - 2x \\ &\Leftrightarrow (x+\beta)^2 + \alpha = x^2 - 2x \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2\beta x + \beta^2 + \alpha = x^2 - 2x.\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν

$$2\beta = -2 \quad \text{και} \quad \beta^2 + \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta = -1 \quad \text{και} \quad \alpha = -1.$$

(β') Έχουμε

$$f(x) = x^2 - 1, \ \ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \ g(x) = x - 1, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Είναι $-1 \neq 1$ και $f(-1) = 0 = f(1)$, συνεπώς η f δεν είναι $1-1$.

Άρα, η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$, έχουμε

$$g(x_1) = g(x_2) \Longrightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Οπότε, η συνάρτηση g είναι $1-1$ και συνεπώς αντιστρέφεται.

Για την εύρεση της αντίστροφης της συνάρτησης g:

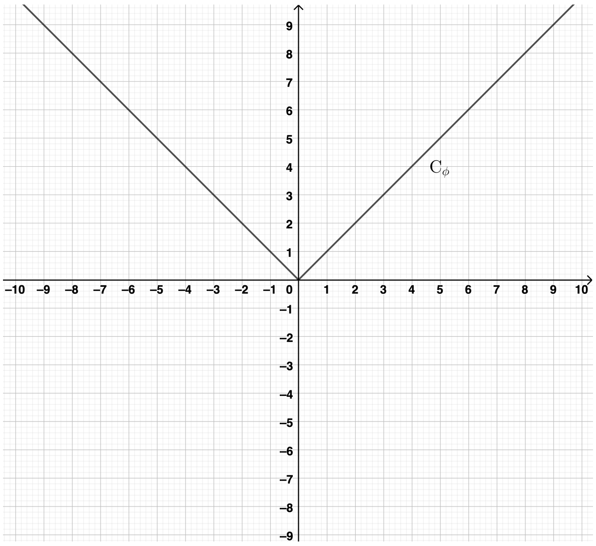
$$g(x) = y \Leftrightarrow x - 1 = y \Leftrightarrow x = y + 1, \ \ y \in \mathbb{R}.$$

Άρα, $g^{-1}(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(γ') Οι συναρτήσεις g^{-1} και f έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Οπότε, η συνάρτηση $g^{-1}of$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Ισχύει

$$\left(g^{-1}of\right)(x) = g^{-1}\left(f(x)\right) = g^{-1}\left(x^2-1\right) = x^2-1+1 = x^2,\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Είναι $\phi(x) = \sqrt{(g^{-1}of)(x)} = \sqrt{x^2} = |x|,\ \ x\in\mathbb{R}$.
Η γραφική παράσταση της ϕ:



(δ') Για $x\in\mathbb{R}$, έχουμε: $\phi(x) - συνx + 1 = 0 \Leftrightarrow |x| = συνx - 1$.
Αφού $συν0 = 1$, το $x = 0$ είναι λύση της εξίσωσης, διότι $|0| = συν0 - 1$.
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει

$$-1 \le συνx \le 1 \Leftrightarrow -2 \le συνx - 1 \le 0.$$

Επειδή, για κάθε $x\neq 0$, ισχύει ότι

$$συνx - 1 \le 0 < |x|,$$

η εξίσωση $|x| = συνx - 1$, έχει μοναδική λύση το $x = 0$.

Σχόλιο:
Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται το μοναδικό κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ϕ και ψ, όπου $\phi(x) = |x|$ και $\psi(x) = συνx - 1$.