

Συντεταγμένες στο Επίπεδο

3ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Δίνεται το σημείο $A(\lambda^2 - 9, \lambda - 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε το σημείο A να ανήκει

(α) στον άξονα $y'y$,

(β) στο 2ο τεταρτημόριο.

2. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 9, \lambda^2 - 5\lambda + 6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Για ποια τιμή του λ είναι:

(α) $\vec{\alpha} = \vec{0}$;

(β) $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \parallel y'y$;

3. Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{\alpha} = (\kappa - 2\lambda, \kappa) \text{ και } \vec{\beta} = (3, \lambda + 1), \kappa, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ , ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να είναι ίσα.

4. Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{\alpha} = (-11, -1), \vec{\beta} = (3, -1) \text{ και } \vec{\gamma} = (-2, 3).$$

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων:

i. $\vec{\nu} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$

ii. $\vec{\mu} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$

(β) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

5. Δίνεται ότι:

$$A(3, -2), \Gamma(-2, -1), \text{ και } \overrightarrow{AB} = (1, -1).$$

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B .

(β) Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ .

(γ) Αν $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{E\Gamma}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου E .

6. Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$, $B(3, 2)$ και $\Gamma(-1, 5)$.

Αν M είναι το μέσο του AB , να βρείτε:

(α) τις συντεταγμένες του σημείου M ,

(β) το σημείο Δ , ώστε το M να είναι το μέσο του $\Gamma\Delta$.

Σημείωση

Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$,
τότε:
 $\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow$
 $x = 0$ και
 $y = 0$.

Σημείωση

Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$,
τότε:
 $\vec{\alpha} \parallel x'x \Leftrightarrow$
 $y = 0$
και
 $\vec{\alpha} \parallel y'y \Leftrightarrow$
 $x = 0$.

Σημείωση

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$
και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε:
 $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow$
 $x_1 = x_2$ και
 $y_1 = y_2$.

Σημείωση

Αν $A(x_1, y_1)$
και $B(x_2, y_2)$,
τότε το μέσο
του AB είναι
 $M(\frac{x_1 + x_2}{2},$
 $\frac{y_1 + y_2}{2})$.

Σημείωση

Αν $A(x_1, y_1)$,
 $B(x_2, y_2)$,
τότε: $\overrightarrow{AB} =$
 $(x_2 - x_1,$
 $y_2 - y_1)$.

7. Δίνονται τα σημεία $A(3, -1)$ και $B(1, 3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου του A ως προς το σημείο B .
8. Αν τα σημεία $\Delta(1, -2)$, $E(6, 1)$ και $Z(2, 5)$ είναι τα μέσα των πλευρών AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα του τριγώνου $AB\Gamma$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του.
9. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(6, -7)$, $B(3, -10)$, και $\Gamma(-2, 1)$.
Να βρείτε τις συντεταγμένες:

- (α') της κορυφής Δ ,
(β') του κέντρου K του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

10. Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\alpha}_0$ το οποίο έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\vec{\alpha} = (4, -3)$.

11. Δίνονται τα σημεία

$$A(1 + 2\alpha, 4\alpha - 2) \text{ και } B(5\alpha + 1, -\alpha), \alpha \in \mathbb{Z}.$$

- (α') Να γράψετε το $\vec{AB}$ συναρτήσει του α και να βρείτε το α , ώστε $|\vec{AB}| = 10$.
(β') Έστω $\alpha = 2$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με βάση την AB .

12. Έστω τα σημεία $A(-1, 2\kappa)$, $B(\kappa - 1, 2 + \kappa)$ και $\Gamma(\kappa, \kappa + 3)$, όπου κ πραγματικός αριθμός.

- (α') Να βρείτε την τιμή του κ ώστε τα σημεία A, B, Γ να είναι συνευθειακά.
(β') Αν $\kappa = 1$,
i. να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι το μέσο του τμήματος $A\Gamma$,
ii. να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{BA}$ με τον άξονα $x'x$.

13. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$.

- (α') Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$ και $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}$.
(β') Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
(γ') Αν τα $\vec{\beta}$, $\vec{w}$, $\vec{u}$, είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων K, Λ, M αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

(Γράφεζα θεμάτων)

14. Δίνονται τα σημεία $A(1, 4)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(3, 1)$.

- (α') Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ ορίζουν τρίγωνο.
(β') Να βρείτε τα $|\vec{AB}|$, $|\vec{A\Gamma}|$ και $|\vec{B\Gamma}|$.
(γ') Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς τις πλευρές του.
(δ') Να βρείτε το μήκος της διαμέσου του τριγώνου $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στην πλευρά $B\Gamma$.

"Φτασμένες οι προλήψεις σε μια καθαρότητα μαθηματική, μας οδηγούν στη βαθύτερη γνώση του κόσμου."

Οδυσσέας Ελύτης, 1911 – 1996, Έλληνας ποιητής.