Το Θέμα της Εβδομάδας

Γραφική παράσταση Συνάρτησης-Πράξεις Συναρτήσεων

Μονότονες Συναρτήσεις-Αντίστροφη Συνάρτηση

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 5ο. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\ln x$ και η συνάρτηση $g:(-\infty,2]\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{2-x}$.

(α') Να βρείτε τις συναρτήσεις $f o g$ και $g o f$.

(β') Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f o g$ με τον άξονα $x'x$.

(γ') Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f o g$ με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(δ') Να λύσετε την ανίσωση $(g o f)(x) < \frac{x}{e}$.

(ε') Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης $g o f$.

(ϛ') Να αποδείξετε ότι $(g o f)^2(\alpha)+\alpha f(\alpha)\geq 2$, για κάθε $\alpha\in(0,e^2]$.

Λύση.

(α') Για την συνάρτηση $f o g$, έχουμε:

$$\begin{aligned} D_{fog} &= \{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} = \{x\in(-\infty,2] \mid \sqrt{2-x}\in(0,+\infty)\} \\ &= \{x\leq 2 \mid \sqrt{2-x}>0\} \\ &= \{x\leq 2 \mid 2-x>0\} \\ &= \{x\leq 2 \mid x<2\} \\ &= (-\infty,2). \end{aligned}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt{2-x}\right)=\ln\left(\sqrt{2-x}\right),\quad x\in(-\infty,2).$$

Για την συνάρτηση $g o f$, έχουμε:

$$\begin{aligned} D_{gof} &= \{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\} = \{x\in(0,+\infty) \mid \ln x\in(-\infty,2]\} \\ &= \{x>0 \mid \ln x\leq 2\} \\ &= \{x>0 \mid \ln x\leq \ln e^2\} \\ &= \{x>0 \mid x\leq e^2\} \\ &= \left(0,e^2\right]. \end{aligned}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\ln x)=\sqrt{2-\ln x},\quad x\in\left(0,e^2\right].$$

(β') Οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_{fog} με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$(fog)(x)=0,\quad x\in D_{fog}.$$

Για $x < 2$, έχουμε ισοδύναμα:

$$\ln\left(\sqrt{2-x}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow 2 - x = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Οπότε, το $M(1,0)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης fog με τον άξονα $x'x$.

(γ') Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_{fog} και C_f, είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$(fog)(x) = f(x), \ \ x \in D_{fog} \cap D_f.$$

Για $x \in (0,2)$, έχουμε ισοδύναμα:

$$\ln\left(\sqrt{2-x}\right) = \ln x \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = x \Leftrightarrow 2 - x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0.$$

Από τις λύσεις της τελευταίας εξίσωσης ($x = 1, x = -2$), δεκτή είναι το $x = 1$, αφού $x \in (0,2)$.

Έχουμε, $f(1) = 0 = (fog)(1)$, άρα οι C_{fog} και C_f έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $M(1,0)$.

(δ') Η ανίσωση ορίζεται στο $\left(0, e^2\right]$ και γράφεται ισοδύναμα:

$$(gof)(x) < \frac{x}{e} \Leftrightarrow \sqrt{2 - \ln x} - \frac{x}{e} < 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = \sqrt{2-\ln x} - \dfrac{x}{e}, \ \ x \in \left(0, e^2\right]$.

Ισχύει ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, e^2\right]$. (να προσπαθήσετε να το αποδείξετε)

Οπότε,

$$\sqrt{2-\ln x} - \frac{x}{e} < 0 \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow h(x) < h(e) \Leftrightarrow x \in \left(e, e^2\right].$$

(ε') Η συνάρτηση gof είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, e^2\right]$. (να προσπαθήσετε να το αποδείξετε)

Άρα, είναι $1-1$ και συνεπώς αντιστρέφεται.

Με $x \in \left(0, e^2\right]$, έχουμε

$$\begin{aligned}(gof)(x) = y &\Leftrightarrow \sqrt{2-\ln x} = y, \ \ y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 - \ln x = y^2, \ \ y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = 2 - y^2, \ \ y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x = e^{2-y^2}, \ \ y \geq 0.\end{aligned}$$

Οπότε, $(gof)^{-1}(x) = e^{2-x^2}, \ \ x \in [0, +\infty)$.

(ϛ') Έχουμε

$$\begin{aligned}(gof)^2(\alpha) + \alpha f(\alpha) \geq 2 &\Leftrightarrow 2 - \ln\alpha + \alpha\ln\alpha \geq 2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - 1)\ln\alpha \geq 0,\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\alpha \in \left(0, e^2\right]$, αφού:

α	0	1	e^2
$\alpha - 1$	-	0	+
$\ln\alpha$	-	0	+
$(\alpha-1)\ln\alpha$	+	0	+

- αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\alpha - 1 < 0$ και $\ln\alpha < 0$, οπότε $(\alpha-1)\ln\alpha > 0$ και
- αν $1 \leq \alpha \leq e^2$, τότε $\alpha - 1 \geq 0$ και $\ln\alpha \geq 0$, οπότε $(\alpha - 1)\ln\alpha \geq 0$.