

Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

5ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

(β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

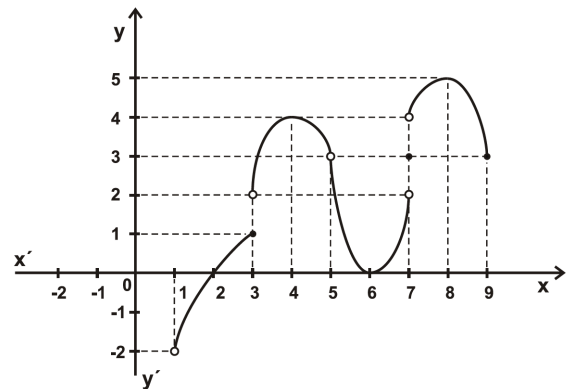
i. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

v. $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$



Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ όταν:

(α) $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$

(β) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -x + 1, & x > 1 \end{cases}$

3. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} = \frac{8}{3}$.

(γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = -1$.

(β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4} = \frac{11}{4}$.

(δ) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right) = -\frac{1}{4}$.

4. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - |3x - 2|}{x - 1}$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 + x - 1| + x^2 - 2x}{x - 1}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x - 2}$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^5 - 5x + 1| - |x^3 - 3x + 1|}{x}$

5. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2}, & -2 < x < 2 \\ x^2 + 5x + 2, & x \geq 2 \end{cases}$

να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Σημείωση

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$,
τότε $f(x) > 0$
κοντά στο x_0 .
Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$,
τότε $f(x) < 0$
κοντά στο x_0 .

6. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$|f(x) - 2| \leq x^2 - 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

7. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R}) = (1, 2)$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x))$.

8. Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.
Να αποδείξετε ότι:

(α) αν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ και $|f(x)| \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$,

(β) αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$,

(γ) αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$,

(δ) αν $\lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) + g^2(x)) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

9. Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2022x)}{\eta\mu(2023x)}$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sigma\phi x - \frac{1}{\eta\mu x} \right)$

(ζ) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\epsilon\phi x}$

(ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}$

(η) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x+1} - 1} \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

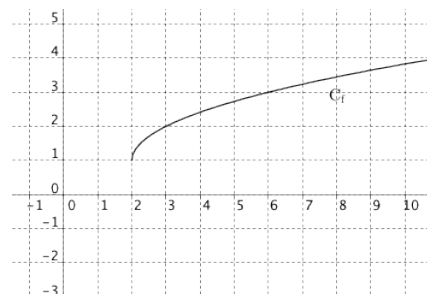
(γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x+9} - 3}$

(ϑ) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$

(θ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x} \right)}{\eta\mu x}$

10. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 6} f(f(x))$.



11. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-1} + x\sqrt[3]{x-1} - 3}{x-2}$.

12. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x}{x-2} = 1$, να βρείτε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 4}{x-2}$.

13. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x) - f(-x)\eta\mu 3x}{2x^2 - \eta\mu^2 x} = 10$.

“ Τα μαθηματικά είναι η τέχνη να δίνεις το ίδιο όνομα σε διαφορετικά πράγματα.”

Ανρί Πουανκαρέ, 1854-1912, Γάλλος μαθηματικός.

Κρ. Παρεμβολής

Αν
 $h(x) \leq f(x) \leq$
 $\leq g(x)$, κοντά
 στο x_0
 και
 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$,
 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$,
 τότε
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

Σημείωση

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} =$$

$$= 0$$