Το Θέμα της Εβδομάδας

Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 6ο. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - x + 1$ και η συνάρτηση $g : \left[\frac{3}{4}, +\infty\right) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{4x - 3}$.

(α') Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq \frac{3}{4}$.

(β') Να βρείτε την συνάρτηση $h = gof$.

(γ') Αν $h(x) = |2x - 1|$, να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu(x)}{f(x) + 1}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \left(h(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{h(x)}\right)\right)$

Λύση.

(α') Έχουμε

$$f(x) \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\left(x^2 - x + 1\right) \geq 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0,$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β') Οι συναρτήσεις f και g, έχουν πεδία ορισμού:

$$D_f = \mathbb{R} \quad \text{και } D_g = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right).$$

Για το πεδίο ορισμού της $h = gof$, έχουμε:

$$\begin{aligned} D_h = D_{gof} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq \frac{3}{4}\} \\ &= \mathbb{R}, \quad \text{αφού από το ερώτημα (α) ισχύει } f(x) \geq \frac{3}{4}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Για τον τύπο της συνάρτησης $h = gof$, έχουμε:

$$\begin{aligned} h(x) = (gof)(x) = g(f(x)) &= \sqrt{4(x^2 - x + 1) - 3} \\ &= \sqrt{4x^2 - 4x + 1} \\ &= \sqrt{(2x-1)^2} \\ &= |2x - 1|. \end{aligned}$$

(γ') i. Αφού $\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)=-1<0$, τότε $2x-1<0$ κοντά στο 0, άρα $|2x-1|=-2x+1$, κοντά στο 0.
Οπότε,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-1}{\sqrt{x+1}-1}&=\lim_{x\to 0}\frac{-2x+1-1}{\sqrt{x+1}-1}\\&=-2\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\\&=-2\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}\\&=-2\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)\\&=-4.\end{aligned}$$

ii.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημ(x)}{f(x)+1}=\lim_{x\to 0}\frac{ημ(x)}{x^2-x+2}=\frac{0}{2}=0.$$

iii. Έστω $h(x)=u$, κοντά στο $\frac{1}{2}$.
Οπότε, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}u=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}h(x)=0$.
Άρα,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(h(x)\cdot ημ\left(\frac{1}{h(x)}\right)\right)=\lim_{u\to 0}u\cdot ημ\left(\frac{1}{u}\right)=0.$$