

Το Θέμα της Εβδομάδας

Όριο Συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Θέμα 7ο. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 3.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

(β) Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - 2| + x - 1}{x}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \operatorname{συν} \frac{1}{x} - \operatorname{συν} \frac{1}{x} \right)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x - 1) - 1}{x - 1}$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) - 1}{x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - f(x)}{\sqrt{x + 2} - 2}$

Λύση.

(α) Έστω $g(x) = \frac{f(x) - 1}{x}$, κοντά στο 0.

Τότε, έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$$

και

$$f(x) = xg(x) + 1, \text{ κοντά στο } 0.$$

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x) + 1) = 0 \cdot 3 + 1 = 1.$$

(β)

i. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 2) = 1 - 2 = -1 < 0$, τότε $f(x) - 2 < 0$, κοντά στο 0,

άρα $|f(x) - 2| = -f(x) + 2$, κοντά στο 0.

Οπότε,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - 2| + x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f(x) + 2 + x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f(x) + x + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{f(x) - 1}{x} + \frac{x}{x} \right) \\ &= -3 + 1 = -2. \end{aligned}$$

ii. Θέτουμε $u = x - 1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} u = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$.

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1) - 1}{x-1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u) - 1}{u} = 3.$$

iii. Αφού $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - f(x)}{\sqrt{x+2} - 2} = \frac{1^2 - 1}{\sqrt{2} - 2} = 0.$$

iv.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \operatorname{συν} \frac{1}{x} - \operatorname{συν} \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left((f(x) - 1) \operatorname{συν} \frac{1}{x} \right).$$

Για κάθε $x \neq 0$, ισχύει ότι:

$$\left| (f(x) - 1) \operatorname{συν} \frac{1}{x} \right| \leq |f(x) - 1|,$$

αφού $\left| \operatorname{συν} \frac{1}{x} \right| \leq 1$, για κάθε $x \neq 0$.

Οπότε,

$$-|f(x) - 1| \leq (f(x) - 1) \operatorname{συν} \frac{1}{x} \leq |f(x) - 1|, \quad \text{για κάθε } x \neq 0.$$

Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (-|f(x) - 1|) = -|1 - 1| = 0,$$

άρα, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left((f(x) - 1) \operatorname{συν} \frac{1}{x} \right) = 0.$$

v. Ισχύει ότι $\eta\mu x \neq 0$, κοντά στο 0.

Οπότε,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(\eta\mu x) - 1}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 3 \cdot 1 = 3,$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

και αν θέσουμε $\eta\mu x = u$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) - 1}{\eta\mu x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u) - 1}{u} = 3.$$