

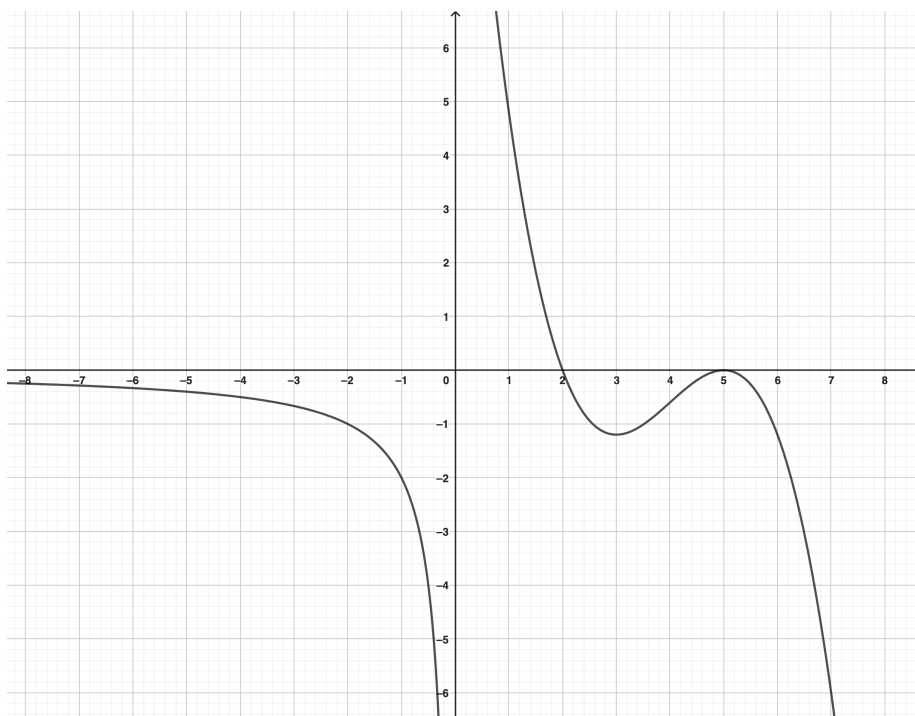
Το Θέμα της Εβδομάδας

Μη Πεπερασμένο Όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Όριο Συνάρτησης στο Άπειρο

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Θέμα 8ο. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια :

$$(α) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)}$$

$$(δ) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$$

$$(ζ) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + 2}{f(x) - 2}$$

$$(β) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$(ε) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$$

$$(η) \lim_{x \rightarrow 2} \left(f(x) \sin \left(\frac{1}{x-2} \right) \right)$$

$$(γ) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-6}{f(x)}$$

$$(ς) \lim_{x \rightarrow 0^-} (f^3(x) - f(x))$$

$$(θ) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{f^2(x) + 1}}{f(x)}$$

Λύση.

$$(α) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

(β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, άρα το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

(γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο 5, άρα $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Επίσης, $\lim_{x \rightarrow 5} (x - 6) = -1$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 6}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 5} \left((x - 6) \cdot \frac{1}{f(x)} \right) = +\infty.$$

(δ) Το όριο δεν υπάρχει, διότι:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 \text{ και } f(x) > 0, \text{ κοντά στο } 2^-$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \text{ και } f(x) < 0, \text{ κοντά στο } 2^+.$$

(ε) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

(ς) Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f^3(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x) (f^2(x) - 1)) = -\infty,$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f^2(x) - 1) = +\infty$, διότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f^2(x) = +\infty$.

(ζ) Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + 2}{f(x) - 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) \left(1 + \frac{2}{f(x)} \right)}{f(x) \left(1 - \frac{2}{f(x)} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{2}{f(x)}}{1 - \frac{2}{f(x)}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1,$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{f(x)} = 0$, διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

(η) Για κάθε $x \neq 2$, ισχύει

$$\left| f(x) \operatorname{syn} \left(\frac{1}{x - 2} \right) \right| \leq |f(x)|,$$

$$\text{διότι } \left| \operatorname{syn} \left(\frac{1}{x - 2} \right) \right| \leq 1.$$

Οπότε, για κάθε $x \neq 2$, έχουμε $-|f(x)| \leq f(x) \operatorname{syn} \left(\frac{1}{x - 2} \right) \leq |f(x)|$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2} |f(x)| = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2} (-|f(x)|) = 0$, τότε από το κριτήριο παρεμβολής

έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \left(f(x) \operatorname{syn} \left(\frac{1}{x - 2} \right) \right) = 0$.

(θ) Είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{f^2(x) + 1}}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{f^2(x)} \sqrt{1 + \frac{1}{f(x)}}}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|f(x)| \sqrt{1 + \frac{1}{f(x)}}}{f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-f(x) \sqrt{1 + \frac{1}{f(x)}}}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{f(x)}} \right) = -1, \end{aligned}$$

διότι $|f(x)| = -f(x)$ κοντά στο 0^- , αφού $f(x) < 0$ κοντά στο 0^-

και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.