

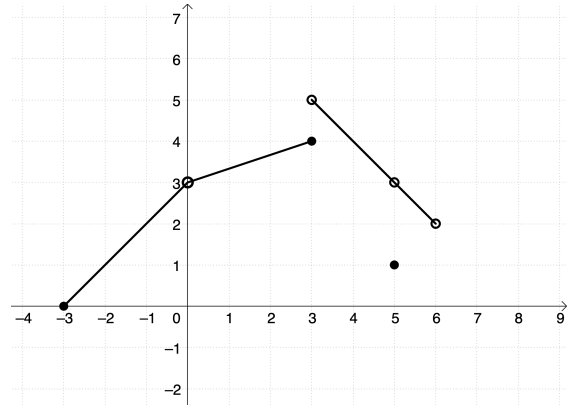
Συνέχεια Συνάρτησης

7ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Να βρείτε:



(α) το πεδίο ορισμού της f

(β) τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

2. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια στο x_0 , τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases},$$

$$x_0 = 0$$

(β)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x - x^2| + x - 9}{x - 3}, & \text{αν } x < 3 \\ \sqrt{x^2 + 7}, & \text{αν } x \geq 3. \end{cases},$$

$$x_0 = 3$$

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$|f(x)| \leq |x|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

4. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x = 0$ και ισχύει:

$$\eta\mu 2x - x^2 \leq xf(x) \leq \eta\mu 2x + x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να βρείτε το $f(0)$.

5. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x - 1} = 5.$$

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, 4)$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Σημείωση

f συνεχής στο $x_0 \in D_f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 4x + 2 = 0$, έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-3, 2)$.

7. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$e^{x_0} + \ln(x_0 + 1) = 2.$$

8. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$.
Αν $\alpha < 1 < \beta$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x - \alpha} + \frac{f(\beta)}{\beta - x} = 0,$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

(α) υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$,

(β) δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.

10. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) = x^2 + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

(β) Αν $f(0) = -1$, να προσδιορίσετε τον τύπο της f .

11. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 5$ και

$$f(f(x)) + f(x) = 20, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(5) = 15$

(β) $f(10) = 10$.

12. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

13. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{xe^x - 1}{e^x}.$$

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x - 2021)e^x = 1$, έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

“Τα πράγματα αυτού του κόσμου δεν μπορούν να κατανοηθούν χωρίς τη γνώση των
Μαθηματικών”

Bacon Roger, 1214 – 1292, Άγγλος φιλόσοφος.

Bolzano:

Έστω μια
συνάρτηση
 f ορισμένη
στο κλειστό
διάστημα
 $[\alpha, \beta]$. Αν η f
είναι συνεχής
στο $[\alpha, \beta]$
και
 $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$
τότε υπάρχει
ένα, του-
λάχιστον,
 $x_0 \in (\alpha, \beta)$
τέτοιο, ώστε
 $f(x_0) = 0$.

Σημείωση

Αν μια συνάρτη-
ση f είναι συνε-
χής σε ένα δι-
άστημα Δ και
δεν μηδενίζεται
σ' αυτό, τότε
διατηρεί πρόση-
μο στο διάστη-
μα Δ .

Θ.Ε.Τ

Θεώρημα
Ενδιαμέσων
Τιμών:
Έστω μια
συνάρτηση f
η οποία είναι
ορισμένη σε
ένα κλειστό
διάστημα
 $[\alpha, \beta]$. Αν η f
είναι συνεχής
στο $[\alpha, \beta]$ και
 $f(\alpha) \neq f(\beta)$
Τότε, για κάθε
αριθμό η
μεταξύ των
 $f(\alpha)$ και $f(\beta)$
υπάρχει ένα,
τουλάχιστον
 $x_0 \in (\alpha, \beta)$
τέτοιο, ώστε
 $f(x_0) = \eta$.

Σημείωση

Η εικόνα
 $f(\Delta)$ ενός
διαστήματος
 Δ μέσω μιας
συνεχούς και
μη σταθερής
συνάρτησης f
είναι διάστημα.

Θ.Μ.Ε.Τ

Θεώρημα
Μέγιστης-
Ελάχιστης
Τιμής:
Αν f είναι
συνεχής
συνάρτηση στο
 $[\alpha, \beta]$, τότε
η f παίρνει
στο $[\alpha, \beta]$ μια
μέγιστη τιμή
 M και μια
ελάχιστη τιμή
 m .
Επίσης,
 $f([\alpha, \beta]) =$
 $[m, M]$