

Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

4ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Σημείωση

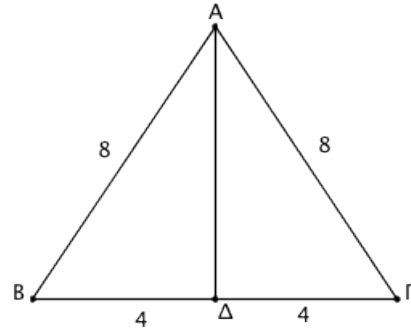
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

Σημείωση

$$\begin{aligned} \vec{a}^2 &= |\vec{a}|^2 \\ \vec{a} \uparrow \vec{b} &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \\ \vec{a} \downarrow \vec{b} &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \end{aligned}$$

- Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$ και $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{3}$, να βρείτε το $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
 - Αν $|\vec{a}| = 2$, $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ και $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$, να βρείτε το $|\vec{b}|$.
 - Αν $|\vec{a}| = 2$, $\vec{a} \downarrow \vec{b}$ και $\vec{a} \cdot \vec{b} = -12$, να βρείτε το $|\vec{b}|$.
 - Αν $|\vec{a}| = 2$, να βρείτε το $\vec{a}^2$.

- Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:



- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| (α) $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$ | (δ) $\vec{AD} \cdot \vec{DA}$ |
| (β) $\vec{AG} \cdot \vec{DB}$ | (ε) $\vec{AD} \cdot \vec{BD}$ |
| (γ) $\vec{GA} \cdot \vec{AD}$ | (ς) $\vec{AD} \cdot \vec{DB}$ |

- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ με $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{6}$, $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$.
Να βρείτε:

- | | |
|-----------------------------|---|
| (α) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ | (δ) $ \vec{a} + \vec{b} $ |
| (β) $\vec{a}^2 + \vec{b}^2$ | (ε) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ |
| (γ) $(\vec{a} + \vec{b})^2$ | (ς) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 5\vec{b})$ |

- Δίνονται τα σημεία A $(-3, 6)$, B $(4, 1)$ και Γ $(4, -1)$.

- Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$.
- Να βρείτε σημείο Κ του άξονα x'x τέτοιο, ώστε: $\vec{AK} \perp \vec{AG}$.

- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ τέτοια, ώστε:

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3 \text{ και } \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{2}.$$

Αν $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{u}$.

Σημείωση

$$\begin{aligned} \text{αν } \vec{a} &= (x_1, y_1) \\ \text{και } \vec{b} &= (x_2, y_2) \text{ τότε:} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= x_1 x_2 + y_1 y_2. \end{aligned}$$

Σημείωση

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) &= (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}). \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \end{aligned}$$

Σημείωση

$$\begin{aligned} \text{Αν } \vec{a}, \vec{b} &\neq \vec{0}, \\ \text{τότε:} \\ \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \end{aligned}$$

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει:

$$|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 4 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -8.$$

- (α) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
 (β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} = \vec{0}$.

7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$, για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

- (α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}$,
 (β) τα διανύσματα $\vec{u} - 3\vec{v}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και $|\vec{u} - 3\vec{v}| = 14$.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α (-1, 1), Β (1, 5) και Γ (4, -4).

- (α) Να εξετάσετε αν η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία ή αμβλεία.
 (β) Να βρείτε τη γωνία $\hat{B}$.

9. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2) \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8).$$

- (α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -2)$.
 (β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, να είναι μεταξύ τους κάθετα.
 (γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

10. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύει ότι:

$$|\vec{\alpha}| = 1, \quad |\vec{\beta}| = 1, \quad |\vec{\gamma}| = 2 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} + 5\vec{\beta} + 2\vec{\gamma} = \vec{0}.$$

- (α) Να βρείτε τα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$.
 (β) Να βρείτε τα συν $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$, συν $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}}\right)$ και συν $\left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}}\right)$.
 (γ) Να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$.

11. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 120^\circ$.

- (α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
 (β) Αν $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, να βρείτε:
 i. το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$,
 ii. τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{v}$.
 (γ) Αν για το διάνυσμα $\vec{u}$ ισχύει ότι:

$$\vec{u} \parallel \vec{\beta} \quad \text{και} \quad (\vec{u} + \vec{\alpha}) \perp \vec{\beta},$$

να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.

“Τα Μαθηματικά είναι ένα παιχνίδι που παίζεται σύμφωνα με κάποιους απλούς κανόνες, με σύμβολα που έχουν νόημα, πάνω σε ένα χαρτί.”

David Hilbert, 1862-1943, Γερμανός μαθηματικός.