

Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

Κεφάλαιο 1ο: Διανύσματα

Βασικό Τυπολόγιο

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσίπης

Ορισμός

Διάνυσμα

είναι ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα.



Συντεταγμένες Διανύσματος

Αν δίνονται τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων

$\vec{u} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ τότε $\vec{u} = (\kappa x_1 + \lambda x_2, \kappa y_1 + \lambda y_2)$.

Ορισμός

Μηδενικό

διάνυσμα λέγεται το διάνυσμα του οποίου η αρχή και το πέρας συμπίπτουν.

Μέσο Ευθύγραμμου Τμήματος

Έστω M το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB . Τότε:

• αν O σημείο αναφοράς,

• αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$,

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Ορισμός

Μέτρο ενός διανύσματος ονομάζεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν τα άκρα του.

Μέτρο Διανύσματος

Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Απόσταση Δύο Σημείων

Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Τριγωνική Ανισότητα

$$||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|.$$

Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος

Αν $\vec{\alpha} = \vec{OA} = (x, y)$ και θ η γωνία που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί κατά τη θετική φορά γύρω από το σημείο O μέχρι να συμπίπτει με την ημιευθεία OA , τότε

$$\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{y}{x} = \tan \theta, x \neq 0.$$

Ορισμός

Μοναδιαίο

διάνυσμα λέγεται το διάνυσμα το οποίο έχει μέτρο ένα.

Εσωτερικό Γινόμενο

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$
(αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$)
- $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$
- $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \vec{b}^2$
- $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$

Ίσα Διανύσματα

Ορισμός

Ίσα λέγονται δύο διανύσματα που έχουν ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

Για μη μηδενικά διανύσματα έχουμε: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \uparrow \vec{b} \\ \text{και} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$
ή αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ τότε: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{και} \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

Αντίθετα Διανύσματα

Ορισμός

Αντίθετα λέγονται δύο διανύσματα που έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

Για μη μηδενικά διανύσματα έχουμε: $\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \updownarrow \vec{b} \\ \text{και} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$
ή αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ τότε: $\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ \text{και} \\ y_1 = -y_2 \end{cases}$

Παραλληλία (Ομόρροπα-Αντίρροπα)

Ορισμός

Παράλληλα ή συγγραμμικά λέγονται τα μη μηδενικά διανύσματα που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς (ίδια διεύθυνση).

Αν $\vec{a} = (x_1, y_1) \neq \vec{0}$ και $\vec{b} = (x_2, y_2) \neq \vec{0}$,

- $\vec{a} \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b}, \lambda > 0.$
- $\vec{a} \updownarrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b}, \lambda < 0.$
- $\vec{a} \parallel \vec{x}'x \Leftrightarrow y_1 = 0.$
- $\vec{a} \parallel \vec{y}'y \Leftrightarrow x_1 = 0.$
- $\vec{a} \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|.$
- $\vec{a} \updownarrow \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|.$
- $\vec{a} \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|.$
- $\vec{a} \updownarrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|.$
- Αν $\vec{a}, \vec{b} \parallel \vec{y}'y$ τότε $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$, όπου λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ αντίστοιχα.
- $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$

Ορισμός

Ομόρροπα λέγονται τα διανύσματα που έχουν ίδια διεύθυνση και ίδια φορά (ίδια κατεύθυνση).

Ορισμός

Αντίρροπα λέγονται τα διανύσματα που έχουν ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά (αντίθετη κατεύθυνση).

Καθετότητα

Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, τότε:

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1.$

Συνημίτονο Γωνίας Δύο Διανυσμάτων

Αν $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, τότε $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$