

Άλγεβρα Α' Λυκείου

Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

4ο Φύλλο Εργασίας

Καθηγητής: Νικόλαος Δ. Κατσιπης

Σημείωση

Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός. Αν $\alpha > 0$, τότε $|\alpha| = \alpha$

Σημείωση

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει: $|\alpha| = |- \alpha| \geq 0$

Σημείωση

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει: $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$.

Σημείωση

Αν $\theta < 0$, τότε $|\theta| = -\theta$, αδύνατο.

Σημείωση

Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετος του. Αν $\alpha < 0$, τότε $|\alpha| = -\alpha$

Σημείωση

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει: $|\alpha^2| = \alpha^2$

Σημείωση

$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
Αν $\beta \neq 0$, τότε: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$
 $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Σημείωση

Αν $\theta > 0$, τότε $|\theta| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$.
 $|\theta| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\alpha$

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων.

(α) $|-3| + |-2|$

(δ) $|2| - |-3|$

(β) $|5| + |-2|$

(ε) $|\sqrt{2} - 1| - |1 - \sqrt{2}|$

(γ) $|-1| + |0|$

2. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

(α) $|\alpha^2 + 2\alpha + 1|$

(β) $|- \alpha^2 - 1|$

3. Αν $-1 < x < 4$, να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση

$$A = |x - 4| + |x + 1| - |x - 5|.$$

4. Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού x , να γραφεί χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής η παράσταση:

(α) $|x - 4|$

(β) $5 + |x + 2|$

(γ) $||x| - x|$

5. Αν $x < 2$, να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = |3x - 6| + |10 - 5x|.$$

6. Να βρείτε, αν υπάρχουν, του πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

(α) $|x| = 7$

(γ) $|x| + 6 = 0$

(ε) $|x - 3| = |2x - 1|$

(β) $|x - 1| - 6 = 0$

(δ) $|x - 3| - 1 = 0$

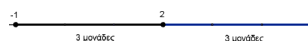
(ς) $|x - 5| - |1 + 2x| = 0$

7. Η ανίσωση $|x - 2| < 3$ σημαίνει:

“ποιοι είναι οι αριθμοί που απέχουν από το 2 απόσταση μικρότερη του 3.”

Δηλαδή:

$$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow d(x, 2) < 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 5)$$



Με τη βοήθεια του παραπάνω να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή Ένωση Διαστημάτων
$ x < 4$		
	$d(x, 5) > 2$	
	$d(x, -1) \leq 2$	
$ x + 2 \geq 1$		

Σημείωση

Απόσταση των αριθμών α και β :
 $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$
 Ισχύει ότι:
 $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$

8. Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$.

(α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$.

(β) Αν $\kappa \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{\kappa} \in (3, 4)$.

(Τράπεζα θεμάτων)

9. Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|\alpha - 2| < 1 \text{ και } |\beta - 3| < 2.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $1 < \alpha < 3$.

(β) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β .

(γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 2\beta$.

(δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$

Σημείωση

Αν $\theta > 0$, τότε:
 $|x| < \theta \Leftrightarrow$
 $-\theta < x < \theta$

Σημείωση

Αν $\theta > 0$, τότε:
 $|x| > \theta \Leftrightarrow$
 $x < -\theta \text{ ή } x > \theta.$

(Τράπεζα θεμάτων)

10. Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

(α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:

i. $|x + 2|$

ii. $|x - 7|$

(β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $|x + 2| + |x - 7|$.

(γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά.

(δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

(Τράπεζα θεμάτων)

“Τα Μαθηματικά είναι ένα παιχνίδι που παίζεται σύμφωνα με κάποιους απλούς κανόνες, με σύμβολα που έχουν νόημα, πάνω σε ένα χαρτί.”

David Hilbert, 1862-1943, Γερμανός μαθηματικός.